

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института



Н. Я. Королева
«05» июля 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине Б1.О.9 Математика

Направление подготовки/специальность: 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Профиль/направленность/специализация: Математическое и компьютерное моделирование

Уровень высшего образования: бакалавриат

Квалификация: Бакалавр

год набора: 2020

Автор программы:

Кандидат физико-математических наук, доцент Плужникова Елена Александровна

Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) (приказ Министерства образования и науки РФ от «10» января 2018 г. № 9).

Рабочая программа принята на заседании Кафедры функционального анализа «18» мая 2021 г. Протокол № 9

Рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института математики, физики и информационных технологий, Протокол от «05» июля 2021 г. № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавра.....	5
3. Объем и содержание дисциплины.....	5
4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства.....	58
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля).....	104
6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	105
7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	106

1. Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель дисциплины – формирование компетенций:

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

1.2 Типы задач профессиональной деятельности, к которым готовятся обучающиеся в рамках освоения дисциплины:

- научно-исследовательский
- проектный

1.3 Дисциплина ориентирована на подготовку обучающихся к профессиональной деятельности в сферах: 01 Образование и наука (в сфере общего, профессионального и дополнительного профессионального образования; в сфере научных исследований), 06 Связь, информационные и коммуникационные технологии (в сфере проектирования, разработки, внедрения и эксплуатации информационных систем, управления их жизненным циклом), 40 Сквозные виды профессиональной деятельности в промышленности (в сфере научно-исследовательских и опытноконструкторских разработок; в сфере разработки автоматизированных систем управления технологическими процессами производства)

1.4 В результате освоения дисциплины у обучающихся должны быть сформированы:

Обобщенные трудовые функции / трудовые функции / трудовые или профессиональные действия (при наличии профстандарта)	Код и наименование компетенции ФГОС ВО, необходимой для формирования трудового или профессионального действия	Индикаторы достижения компетенций
	УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие

1.5 Согласование междисциплинарных связей дисциплин, обеспечивающих освоение компетенций:

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

№ п/п	Наименование дисциплин, определяющих междисциплинарные связи	Форма обучения		
		Очная (семестр)		
		1	3	4
1	Информатика	+		
2	Создание и управление базами данных		+	
3	Философия			+
4	Финансовая грамотность: управление личными финансами		+	
5	Численные методы		+	

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата:

Дисциплина «Математика» относится к обязательной части учебного плана ОП по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина «Математика» изучается в 1, 2, 3, 4 семестрах.

3. Объем и содержание дисциплины

3.1. Объем дисциплины: 18 з.е.

Очная: 18 з.е.

Вид учебной работы	Очная (всего часов)
Общая трудоёмкость дисциплины	648
Контактная работа	260
Лекции (Лекции)	114
Практические (Практ. раб.)	146
Самостоятельная работа (СР)	316
Экзамен	72
Зачет	-

3.2. Содержание курса:

№ темы	Название раздела/темы	Вид учебной работы, час.			Формы текущего контроля
		Лек ции	Пра кт. раб.	СР	
		О	О	О	
1 семестр					
1	Введение в алгебру	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
2	Решение систем линейных алгебраических уравнений. Векторные арифметические пространства	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

3	Матрицы	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
4	Определители	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
5	Алгебраические системы. Группы	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
6	Кольца и поля	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
7	Кольцо многочленов от одной переменной. Поле отношений	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

8	Корни многочленов	4	6	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
2 семестр					
9	Элементы векторной алгебры в пространстве	4	4	6	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
10	Метод координат на плоскости	4	4	6	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
11	Прямая линия на плоскости	4	4	6	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
12	Линии второго порядка	4	4	6	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

13	Преобразования плоскости	4	4	4	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
14	Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов.	4	4	4	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
15	Плоскости и прямые в пространстве	4	4	4	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
16	Преобразования пространства	6	6	4	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
3 семестр					
17	Поверхности второго порядка	2	4	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

18	Введение в анализ. Действительные числа. Функции действительного переменного	3	7	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
19	Предел последовательност и. Предел функции	2	5	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
20	Непрерывность. Элементарные функции	3	5	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
21	Дифференциально е исчисление функций одного переменного. Производная.	4	5	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
22	Основные теоремы дифференциальног о исчисления и их приложения к исследованию функций	2	4	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

23	Интегральное исчисление функций одного переменного. Неопределенный интеграл	1	2	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
24	Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.	1	2	16	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
4 семестр					
25	Ряды. Числовые ряды	4	6	12	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
26	Функциональные последовательности и ряды	4	6	12	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
27	Степенные ряды. Ряды Фурье	4	6	12	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

28	Функции нескольких переменных	4	4	12	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
29	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	6	4	12	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
30	Экстремумы функций нескольких переменных	6	4	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.
31	Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойной интеграл	6	4	8	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.; Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.

Тема 1. Введение в алгебру (УК-1)

Лекция.

Символика математической логики. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратное отображение. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Факторизация отображений. Отношение порядка. Перестановки. Мощность множества перестановок. Произведение перестановок. Степень перестановки. Циклическая структура перестановки. Четность и знак перестановки. Понятие числа. Натуральные числа. Рациональные числа. Действительные числа. Комплексные числа. Операции над комплексными числами.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Символика математической логики. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратное отображение. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Факторизация отображений. Отношение порядка. Перестановки. Мощность множества перестановок. Произведение перестановок. Степень перестановки. Циклическая структура перестановки. Четность и знак перестановки. Понятие числа. Натуральные числа. Рациональные числа. Действительные числа. Комплексные числа. Операции над комплексными числами.

Задания для самостоятельной работы.

1 Указать несколько элементов множества C . Привести пример двух собственных подмножеств множества D . Найти CD , $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$, CR , DR . Изобразить графически CD .

- а) $C=0;2$, $D=0;4;6$;
- б) $C=[1;3)(5;7]$, $D=2;6$;
- в) $C=(2;+)$, $D=[-1;4)$;
- г) $C=x \in \mathbb{N}$, $xx-1x+2x-3=0$, $D=\{0;3\}$;
- д) $C=x \in \mathbb{R}$, $1 < x < 10$, $D=x \in \mathbb{Z}$, $1 < x < 10$;
- е) $C=x \in \mathbb{R}$, $x^2-3x+20$, $D=x\mathbb{R}^+$, $x-12$;
- ж) $C=(-\infty;7]$, $D=x \in \mathbb{R}$, $5 < x < 8$;
- з) $C=0 < x < 6$, x^2 , $D=x \in \mathbb{Z}$, $x \in [2;4]$.

1 Для произвольных множеств A , B , C доказать утверждение, либо привести контр пример и проиллюстрировать его диаграммой Эйлера-Венна.

- а) $A \cup B \setminus B = A$;
- б) $A \setminus BC = A \setminus BA \setminus C$;
- в) $AB \cup C = AB \setminus C$;
- г) $AB = AB$;
- д) $A \cup B \setminus AB = A \setminus BB \setminus A$;
- е) $A \cup B \setminus C = A \setminus CB \setminus C$;
- ж) $AB \setminus C = AB \setminus AC$;
- з) $A \setminus B \setminus C = A \setminus BAC$.

1 Среди множеств: \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , $[0;+)$, \mathbb{N} , \mathbb{R}^- , $(-\infty;0]$, $[0;1]$, $[0;2]$, $[0;2]$ указать такие множества A , B , для которых соответствие $f: A \rightarrow B$ является:

- 1) отображением (доказать);
- 2) сюръективным, но не инъективным отображением;
- 3) инъективным, но не сюръективным отображением;
- 4) биективным отображением.
- а) $fx=x^2$;
- б) $fx=-x$;
- в) $fx=\cos x$;
- г) $fx=x^2+2x$;
- д) $fx=\cos x$;
- е) $fx=\sin x$;
- ж) $fx=x^3$;
- з) $fx=x(x-1)$.

1 Являются ли следующие функции инъективными, сюръективными, биективными?

- а)
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$;

- б)
- $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$;

в)

$$f : [-\pi/2, 0] \rightarrow R, \quad f(x) = \sin x;$$

г)

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin x.$$

д)

$$f : (0, -2] \rightarrow (0, 4], \quad f(x) = x^2;$$

е)

$$f : R \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2;$$

ж)

$$f : [0, +\infty) \rightarrow R, \quad f(x) = x^2;$$

з)

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$$

.

1 Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) обладает бинарное отношение на множестве А. Если оно является эквивалентностью, то описать классы эквивалентности. Если это отношение порядка, то охарактеризовать этот порядок.

а) $A=R, xRy \Leftrightarrow x=y$;б) $A=R, xRy \Leftrightarrow xy$;в) $A=R, xRy \Leftrightarrow xy < 0$;г) $A=R \setminus \{0\}, xRy \Leftrightarrow xy > 0$;д) $A=R, xRy \Leftrightarrow x=y$;е) $A=Z, xRy \Leftrightarrow (x-y) \leq 5$;ж) $A=\{1;2;3;4\}, xRy \Leftrightarrow (x-y) \leq 1$;з) А – множество многоугольников плоскости, xRy многоугольник x подобен многоугольнику y .

1 Найти степень и определить знак (четность) перестановки, найти обратную перестановку, разложить перестановку в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.

а)

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 32465781 \end{pmatrix}$$

;

б)

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 76453128 \end{pmatrix}$$

;

в)

$$\begin{pmatrix} 87654321 \\ 82135467 \end{pmatrix}$$

;

г)

$$\begin{pmatrix} 87654321 \\ 76453128 \end{pmatrix}$$

;

д)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1 Доказать справедливость равенства при любом натуральном n .

- а) $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$;
 б) $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n-1)$;
 в) $1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$;
 г) $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=n^2(2n-1)(2n+1)/3$;
 д) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 е) $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}n(n+1)/2$;
 ж) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=n^2(n+1)^2/4$;
 з) $1^5+2^5+3^5+\dots+n^5=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+5n+3)}{6}$.

1 Найти действительные решения уравнений.

- а) $3x-iy+1+i+6-3ix-iy=18-3i$;
 б) $2-ix-5y+2i-2i3x+i=-3(i-2)$;
 в) $x-iy3-2i+2y-i3+i=-5i-1$;
 г) $2+ix-iy+3y-ii-1=3i+5$;
 д) $2ix+3y-12i-y-2i3+i=-i$;
 е) $y-2+5i+1+ix=17i-4$.

1 Даны комплексные числа $z_1=1+i$, $z_2=i+3$, $z_3=1+2i$, $z_4=i+2$, $z_5=2+3i$, $z_6=3+4i$. Найти мнимую и действительную части комплексных чисел.

- а) $z_2^2-2z_1z_2-1$;
 б) $z_2^2-5z_1z_2z_3z_4+1$;
 в) $3-z_4z_3-z_2z_6z_3z_2$;
 г) $10z_1z_2+z_3z_2-z_5$;
 д) $1+z_6-z_3z_1-z_5z_2$;
 е) $15z_4-z_5z_2+z_3z_3$.

1 1) Найти все значения числа $nz_1z_2^2+z_3z_4^6+z_5^5$;

2) изобразить на координатной плоскости множество точек, заданное условиями

$$\{1 < z+zi < 2, -4\arg z < 32\};$$

3) решить уравнение $z-z=zi$, где

- а) $n=2$, $i=2$,
 $z_1=1+i3$, $z_2=1+i$, $z_3=63+i$, $z_4=61+i$, $z_5=1+(2+3)i$;
 б) $n=3$, $i=2$,
 $z_1=1+5i$, $z_2=1+i$, $z_3=51+2i$, $z_4=2+i$, $z_5=56$;
 в) $n=4$, $i=2$,
 $z_1=-2-2i3$, $z_2=2+i3$, $z_3=3-55-5i$, $z_4=625-5i$, $z_5=-11+35i$;
 г) $n=3$, $i=4$,
 $z_1=-12-2i$, $z_2=16i$, $z_3=1-i3$, $z_4=-1-i$, $z_5=121+3-i3-1$;
 д) $n=4$, $i=3$,
 $z_1=-72-72i3$, $z_2=83i-8$, $z_3=z_4=1-i$, $z_5=80i$;
 е) $n=6$, $i=4$,
 $z_1=1+i36$, $z_2=-1+i16$, $z_3=1+i312$, $z_4=-1-i$, $z_5=23$

Лекция.

Система линейных алгебраических уравнений. Равносильность систем. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Применение метода Гаусса к исследованию и решению систем. Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя второго порядка. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными. Понятие определителя третьего порядка. Арифметическое векторное пространство. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Базис. Размерность.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Система линейных алгебраических уравнений. Равносильность систем. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Применение метода Гаусса к исследованию и решению систем. Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя второго порядка. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными. Понятие определителя третьего порядка. Арифметическое векторное пространство. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Базис. Размерность.

Задания для самостоятельной работы.

1 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

- а) $\{2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, 6x_2 - 4x_1 + 2x_3 = -2\}$.
- б) $\{x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2\}$.
- в) $\{5x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3\}$.
- г) $\{2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2, x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1, 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5\}$.
- д) $\{6x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, 3x_1 - 3x_3 = 1, 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1\}$.
- е) $\{3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1, -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1\}$.
- ж) $\{2x_1 + x_2 - x_3 = 2, 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2\}$.
- з) $\{-6x_1 - 2x_3 = 4, 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 8\}$.

1 Исследовать решение системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от значений параметра.

а)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} (1 + \lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda) x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda) x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

1 Выяснить, образует ли система векторов $\{a, b, c\}$ базис в R^3 . Если да, то разложить по этому базису вектор d .

- а) $a=2;10;2, b=-1;-3;2, c=3;6;-2, d=1;-1;2;$
- б) $a=1;3;-3, b=2;3;0, c=4;1;1, d=2;-3;1;$
- в) $a=1;2;3, b=-2;1;1, c=4;3;5, d=2;-4;8;$
- г) $a=1;3;2, b=4;-2;1, c=2;6;4, d=5;-3;1;$
- д) $a=-1;0;2, b=2;3;-4, c=3;-5;-6, d=1;-2;3;$
- е) $a=1;3;2, b=3;4;5, c=2;1;3, d=2;1;-6;$
- ж) $a=1;4;2, b=1;3;-1, c=-2;-2;0, d=4;-3;1;$
- з) $a=1;2;-3, b=3;2;-4, c=2;-1;0, d=3;-2;-1.$

1 Выяснить, является ли данное множество подпространством в R^4 . Если да, то найти его базис и размерность.

- а) $V = x_1 = 2x_4$;
- б) $V = x_1 = x_3$;
- в) $V = x_1 - x_2 = x_3 - x_4$;
- г) $V = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$;
- д) $V = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$;
- е) $V = x_1 + x_2 = x_4$;
- ж) $V = x_1 + x_2 + x_4 = 0$;
- з) $V = 2x_1 = 3x_4$.

Тема 3. Матрицы (УК-1)

Лекция.

Ранг системы векторов. Строчечный и столбцевой ранги матрицы. Ранг матрицы. Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения. Структура множества решений совместной системы. Общее решение однородной системы. Общее решение неоднородной системы. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Оценка ранга произведения матриц. Транспонирование. Квадратные матрицы. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы. Использование обратной матрицы для решения систем.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Ранг системы векторов. Строчечный и столбцевой ранги матрицы. Ранг матрицы. Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения. Структура множества решений совместной системы. Общее решение однородной системы. Общее решение неоднородной системы. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Оценка ранга произведения матриц. Транспонирование. Квадратные матрицы. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы. Использование обратной матрицы для решения систем.

Задания для самостоятельной работы.

1 При помощи элементарных преобразований найти ранг матрицы.

- а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 & -1 & -3 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & -1 & 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$;
- б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & -8 & -5 & -12 & 5 & 1 & 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;
- в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 & 4 & -2 & 2 & 1 & 7 & 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;
- д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- ж) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & -3 & -1 & -3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 11 & -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;
- з) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 & 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 & 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

1 Найти общее решение, а также фундаментальный набор решений системы уравнений.

- а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, & 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$
- в) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$
- г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$
- д) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 9x_5 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$
- е) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, & 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, & 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
- ж) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

- з) $\{2x_1-12x_2-5x_3-8x_4-x_5=0, \quad 9x_2+3x_3+2x_4+3x_5=0, \quad 10x_1+6x_2-3x_3+7x_4+17x_5=0, \quad 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+10x_5=0.$
- и) $\{2x_1+5x_2+6x_3+8x_4=0, \quad x_1+2x_2+3x_3+3x_4=0, \quad x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0, \quad x_1+x_2+5x_3+3x_4=0, \quad 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4=0.$
- к) $\{5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \quad 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=0, \quad 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \quad 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=0.$

1 Найти матрицу X из уравнения.

- а) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$
- б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 2 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 6 & 3 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix};$
- в) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
- г) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$
- д) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 & 18 \end{pmatrix};$
- е) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix};$
- ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix};$
- з) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 9 & 10 \end{pmatrix};$
- и) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix};$
- к) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$

1 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 0 & -3 & -5 & -3 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 & 7 & -1 & 8 & 7 & -2 & 15 & -3 & 2 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить.

- а) $\text{rkFFPT}-D-1;$
- б) $Q-1-\text{rk}(B)PT;$
- в) $M-NTN+\text{rk}(B)S-1;$
- г) $NM - P-1\text{rk}(A);$
- д) $PFT\text{rk}(G) - P-1;$
- е) $NM-Q-11/\text{rk}(F);$
- ж) $FMT-N\text{rk}(G);$
- з) $D2+\text{rk}(P)FT;$
- и) $CA - BT \text{rk}(C);$
- к) $Q-1- (LR)\text{rk}(A);$
- л) $\text{rk}(D)F2+P-1;$
- м) $S3+S-1-MNT.$

1 Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

- а) $\{4x_1-4x_2+x_3=2, \quad 2x_1+2x_2=1, \quad 3x_2-x_3-3x_1=-6.$
- б) $\{2x_1-3x_2+x_3=1, \quad 4x_1+3x_2-2x_3=-1, \quad 6x_2-4x_1+2x_3=-2.$
- в) $\{5x_1+6x_2+x_3=1, \quad 5x_1+x_2+2x_3=-4 \quad 4x_1+3x_2+x_3=3. \quad ,$
- г) $\{6x_1-x_2+2x_3=3, \quad 3x_1-3x_3=1, \quad 4x_1+x_2-2x_3=-1.$
- д) $\{3x_1-2x_2+4x_3=3, \quad x_1-3x_2+5x_3=-1, \quad -x_1-4x_2+2x_3=1.$
- е) $\{2x_1+x_2-x_3=2, \quad 3x_1-2x_2-x_3=-4, \quad 2x_1-5x_2+x_3=-2.$
- ж) $\{-6x_1-2x_3=4, \quad 3x_1-4x_2+x_3=-2, \quad 8x_1+x_2+4x_3=8.$
- з) $\{2x_1-x_2+3x_3=2, \quad x_1+2x_2-3x_3=-4, \quad 5x_1+5x_2+x_3=-10.$

Тема 4. Определители (УК-1)

Лекция.

Определитель n-ого порядка. Свойства определителей. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Определители специальных матриц. Определитель Вандермонда. Определитель произведения матриц. Критерий невырожденности матрицы. Применение определителей к вычислению обратной матрицы. Формулы Крамера решения систем. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Определитель n-ого порядка. Свойства определителей. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Определители специальных матриц. Определитель Вандермонда. Определитель произведения матриц. Критерий невырожденности матрицы. Применение определителей к вычислению обратной матрицы. Формулы Крамера решения систем. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Задания для самостоятельной работы.

1 Вычислить определитель.

- а) $2 \ 1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ -1 \ 6 \ 3 \ 1 \ 5 \ -1 \ 2$;
- б) $3 \ -1 \ 1 \ 0 \ 8 \ 0 \ 1 \ -3 \ 1 \ 5 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 9 \ 4 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ -1 \ 2 \ -3 \ 0 \ 7$;
- в) $2 \ -5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 7 \ 5 \ 4 \ -9 \ 8 \ 5 \ -3 \ 2 \ -5 \ 3$;
- г) $2 \ 0 \ -1 \ 3 \ 4 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 5 \ 3 \ -3 \ 1 \ -2 \ 0 \ 2 \ -1 \ -1 \ 2 \ 5 \ 1$;
- д) $0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0 \ 1 \ 6 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 3 \ 6 \ -2 \ 0$;
- е) $3 \ -5 \ -2 \ 2 \ -4 \ 7 \ 4 \ 4 \ 4 \ -9 \ -3 \ 7 \ 2 \ -6 \ -3 \ 2$;
- ж) $2 \ -5 \ 1 \ 2 \ -3 \ 7 \ -1 \ 4 \ 5 \ -9 \ 2 \ 7 \ 4 \ -6 \ 1 \ 2$;
- з) $-3 \ 9 \ 3 \ 6 \ -5 \ 8 \ 2 \ 7 \ 4 \ -5 \ -3 \ -2 \ 7 \ -8 \ -4 \ -5$;
- и) $3 \ -3 \ -5 \ 8 \ -3 \ 2 \ 4 \ -6 \ 2 \ -5 \ -7 \ 5 \ -4 \ 3 \ 5 \ -6$;
- к) $0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$.

1 Вычислить определитель матрицы, элементы которой заданы формулой

а)

$$a_{ij} = i \cdot j$$

;

б)

$$a_{ij} = \frac{i}{j}$$

.

1 Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

- а) $\{4x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, 2x_1 + 2x_2 = 1, 3x_2 - x_3 - 3x_1 = -6.$
- б) $\{2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, 6x_2 - 4x_1 + 2x_3 = -2.$
- в) $\{5x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. ,$
- г) $\{6x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, 3x_1 - 3x_3 = 1, 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -1.$
- д) $\{3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1, -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1.$
- е) $\{2x_1 + x_2 - x_3 = 2, 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2.$
- ж) $\{-6x_1 - 2x_3 = 4, 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 8.$
- з) $\{2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, 5x_1 + 5x_2 + x_3 = -10.$

Тема 5. Алгебраические системы. Группы (УК-1)

Лекция.

Операции. Классы операций. Нейтральные и обратные элементы. Обратимые операции. Алгебраические системы. Гомоморфные и изоморфные отображения систем. Группы. Подгруппы. Циклические группы. Отображения групп. Полугруппы. Конечные группы. Таблицы Кэли. Теорема Кэли. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Фактор-группа по нормальному делителю. Теорема о гомоморфизме групп. Ядро гомоморфизма.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Операции. Классы операций. Нейтральные и обратные элементы. Обратимые операции. Алгебраические системы. Гомоморфные и изоморфные отображения систем. Группы. Подгруппы. Циклические группы. Отображения групп. Полугруппы. Конечные группы. Таблицы Кэли. Теорема Кэли. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Фактор-группа по нормальному делителю. Теорема о гомоморфизме групп. Ядро гомоморфизма.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Доказать, что на некотором множестве бинарная операция, заданная формулой $ab=b$, некоммутативна, но ассоциативна.
- 2 Доказать, что действие, выполняемое по правилу $ab=a^2+b^2$, является коммутативной, но не ассоциативной операцией на R .
- 3 Доказать, что
 - а) $M=\{x \in R, \odot\}$ изоморфно $R, +$;
 - б) $R^+, +$ изоморфно $R^-, +$.
- 1 Является ли множество Q^2 чисел вида $a+ib$, где $a, b \in Q$, группой относительно сложения (проверить все аксиомы группы)?
- 2 Является ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in R \setminus \{0\}$, группой относительно умножения (проверить все аксиомы группы)?
- 3 Доказать, что множество целых степеней числа 3 является подгруппой мультипликативной группы Q рациональных чисел, отличных от нуля. Является ли эта подгруппа циклической? Укажите все образующие элементы этой группы.
- 4 Доказать, что множество $4Z$ целых чисел, кратных числу 4, является подгруппой аддитивной группы $2Z$ целых четных чисел. Является ли эта подгруппа циклической? Указать все образующие элементы этой группы.
- 5 Найти все подгруппы в аддитивной группе классов вычетов Z_n . Является ли эта группа циклической? Если «да», то указать все образующие элементы этой группы.
 - а) $n=3$;
 - б) $n=5$;
 - в) $n=7$;
 - г) $n=13$;
 - д) $n=17$.

Тема 6. Кольца и поля (УК-1)

Лекция.

Кольца. Простейшие свойства. Подкольца. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Характеристика поля. Изоморфизмы полей. Примеры колец, полей. Поле комплексных чисел. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами. Кольцо классов вычетов.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Кольца. Простейшие свойства. Подкольца. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Характеристика поля. Изоморфизмы полей. Примеры колец, полей. Поле комплексных чисел. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами. Кольцо классов вычетов.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Являются ли кольцами следующие системы? Если «да», то каковы свойства этих колец (коммутативность, наличие 1, целостность, является ли полем)?

а)

$$K = \{ (x, y, z, v) \mid x \cdot z - y \cdot v = 1, x, y, z, v \in \mathbb{Z} \}$$

с операциями обычного (покомпонентного) сложения и умножения по правилу

$$(x_1, y_1, z_1, v_1) * (x_2, y_2, z_2, v_2) = (x_1 x_2 + y_1 v_2, x_1 y_2 + y_1 z_2, v_1 x_2 + z_1 v_2, v_1 y_2 + z_1 z_2)$$

;

б) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатель не делится на 5;

в) множество функций, определенных на

$$(a, b)$$

, с обычными операциями сложения и умножения;

г) множество вещественных ортогональных матриц второго порядка $ac+bd=0$ с обычным сложением и умножением матриц.

1 Доказать, что

а) в конечном кольце без делителей нуля есть 1;

б) делитель нуля в кольце не может быть обратимым элементом;

в) все обратимые элементы кольца с 1 образуют мультипликативную группу;

г) конечное целостное кольцо является полем.

1 Может ли подкольцо поля не быть полем? Может ли быть полем подкольцо кольца, которое само не является полем?

2 Может ли подкольцо поля не быть полем? Может ли быть полем подкольцо кольца, которое само не является полем?

3 Решить уравнения.

а)

$$z^6 = i$$

;

б)

$$z^3 = -\frac{4}{1+i}$$

;

в)

$$z^4 = -\frac{18}{1+i\sqrt{3}}$$

;

г)

$$z^6 = -27$$

;

д)

$$z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$$

;

е)

$$z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$$

;

ж)

$$iz^2 - (4 - 2i)z - 3i = 0$$

;
 3)

$$z^2 - (2i - 7)z + 13 - i = 0$$

.

1 Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию

а)

$$|z - 2| = \operatorname{Re} z + 2$$

;
 б)

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 2$$

.

1 Двум соседним вершинам квадрата соответствуют комплексные числа

$$z_1, z_2$$

. Найти комплексное число, соответствующее точке пересечения диагоналей.

2 Двум противоположным вершинам квадрата соответствуют комплексные числа

$$z_1, z_2$$

. Найти комплексные числа, соответствующие остальным двум вершинам.

Тема 7. Кольцо многочленов от одной переменной. Поле отношений (УК-1)

Лекция.

Кольцо многочленов $A[x]$ над целостным кольцом A от одной переменной x . Алгебраическая и функциональная точки зрения на многочлен. Понятие алгебраического и трансцендентного элементов. Деление с остатком в кольце $A[x]$. Отношение делимости в кольцах. Неразложимые элементы кольца. Факториальные кольца. Условие однозначности разложения любого элемента кольца на простые множители. НОД и НОК в кольцах. Свойства НОД и НОК. Теорема о НОД и НОК в факториальных кольцах. Евклидово кольцо. НОД и НОК в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида. Теорема о факториальности евклидовых колец. Факториальность кольца многочленов $R[x]$ над полем R . Теорема о бесконечности множества неприводимых многочленов в $R[x]$. Примитивные многочлены. Теорема Гаусса о содержании произведения многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна в кольце $Q[x]$. Поле отношений целостного кольца. Поле рациональных дробей. Простейшие дроби.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Кольцо многочленов $A[x]$ над целостным кольцом A от одной переменной x . Алгебраическая и функциональная точки зрения на многочлен. Понятие алгебраического и трансцендентного элементов. Деление с остатком в кольце $A[x]$. Отношение делимости в кольцах. Неразложимые элементы кольца. Факториальные кольца. Условие однозначности разложения любого элемента кольца на простые множители. НОД и НОК в кольцах. Свойства НОД и НОК. Теорема о НОД и НОК в факториальных кольцах. Евклидово кольцо. НОД и НОК в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида. Теорема о факториальности евклидовых колец. Факториальность кольца многочленов $R[x]$ над полем R . Теорема о бесконечности множества неприводимых многочленов в $R[x]$. Примитивные многочлены. Теорема Гаусса о содержании произведения многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна в кольце $Q[x]$. Поле отношений целостного кольца. Поле рациональных дробей. Простейшие дроби.

Задания для самостоятельной работы.

1 Найти НОД и его линейное выражение через

$$f$$

и

 g

над полем

 \mathbb{Z}_2

, если

а)

$$f = x^5 + x^4 + 1$$

,

$$g = x^4 + x^2 + 1$$

;

б)

$$f = x^5 + x^3 + x + 1$$

,

$$g = x^4 + 1$$

;

в)

$$f = x^5 + x + 1$$

,

$$g = x^4 + x^3 + 1$$

;

г)

$$f = x^5 + x^3 + x$$

,

$$g = x^4 + x + 1$$

.

1 С помощью схемы Горнера разложить многочлен

$$f = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$$

по степеням $x - 1 - 2i$ и найти значения его производных в точке $x_0 = 1 + 2i$.

2 При каких значениях

 a, b

многочлен

$$f = ax^n + bx + 1$$

делится на

$$(x - 1)^2$$

?

3 В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найти НОД и НОК многочленов.а) $x^3x^3 - 22x^2 - 3; xx^2 + 12x^3 - 2;$ б) $x^4 - 4x^2 - 2; x^2 + 22x^4 + 4.$ 1 С помощью алгоритма Евклида найти линейное выражение НОД двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$.а) $3x^3 - 2x^2 + x + 2; x^2 - x + 1;$ б) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2; x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$

1 Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $g(x)$.

- а) $fx=2x^4-4x^3+4x^2-6$ Zx ; $gx=x^2-3x-1$ Zx ;
 б) $fx=x^5-2+ix^4-x^2+2+ix$ Cx ; $gx=2x^4-4+2ix^3-x^2-x+1$ Cx ;
 в) $fx=2x^4-3x^3+3x^2-5x+6$ Zx ; $gx=x^2-3x+1$ Zx ;
 г) $fx=x^5+1-ix^4+x^3-ix^2-1$ Cx ; $gx=x^4-ix^3-(1-i)x^2-x+1$ Cx .

1 Найти делитель $g(x)$, если известны делимое $f(x)$, частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ в кольце Zx .

- а) $fx=2x^5+3x^4+2x^3+1$; $qx=x^2+3x+1$; $rx=63x+25$;
 б) $fx=x^5-2x^4-x^3-7x^2-5x+3$; $qx=x^3-3x^2-1$; $rx=-4x+5$.

1 Используя схему Горнера, найти ga .

- а) $gx=3x^4-x+300i$; $a=-3+i$;
 б) $gx=2x^3-9x^2+4x-5$; $a=5+i$.

1 Найти значения a и b , при которых многочлен fx делится на многочлен gx .

- а) $fx=x^4+ax+b$; $gx=x^2+2x+7$;
 б) $fx=x^5+ax+b$; $gx=x^2+1$.

Тема 8. Корни многочленов (УК-1)

Лекция.

Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни. Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Формулы Виета. Изоморфизм кольца $A[x]$ над бесконечным кольцом A кольцу полиномиальных функций. Интерполяция многочленов.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни. Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Формулы Виета. Изоморфизм кольца Ax над бесконечным кольцом A кольцу полиномиальных функций. Интерполяция многочленов.

Задания для самостоятельной работы.

1 Разложить многочлен

а)

$$f = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$$

по степеням

$$x - 1 - 2i$$

;

б)

$$f = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + 5i$$

по степеням

$$x + i$$

;

в)

$$f = x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 6$$

по степеням

$$x - 2$$

;

г)

$$f = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 16$$

по степеням

$$x + 2$$

- 1 Доказать, что кратность корня a многочлена

$$F(x) = 0,5(x-a)(f'(x) + f'(a)) - f(x) + f(a)$$

не ниже 3, где

$$f(x)$$

– некоторый многочлен.

- 2 При каких значениях a многочлен

$$f \in R[X]$$

имеет кратный множитель?

а)

$$f = x^3 - 3x + a$$

;

б)

$$f = x^3 - (a-2)x - 2$$

- 1 Найти неизвестный коэффициент многочлена

$$f = x^3 + 6x^2 + 5x + a$$

, если известно, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

- 2 Доказать, что в \mathbb{Z}_p многочлен $f = x^n - 1$, где $n, p = 1$, не имеет кратных корней.

Тема 9. Элементы векторной алгебры в пространстве (УК-1)

Лекция.

Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость векторов. Трёхмерное векторное пространство. Базис. Подпространство векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение векторов.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Линейная зависимость векторов. Трёхмерное векторное пространство. Базис. Подпространство векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение векторов.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, O – его центр. Полагая, $OA = a$, $OB = b$, выразить OC , OD , OE , AB , BC , ED , CA через векторы a и b .
- 2 Пусть векторы a , b , c линейно не зависимы. Выяснить, коллинеарны ли векторы p_1 , p_2 , если $p_1 = 3a - 23b + c$, $p_2 = 3a - 6b + 2c$.
- 3 Доказать, что система векторов $\{a, b, c\}$ образует базис в R^3 , разложить по этому базису вектор d , если $a = 2; 10; 2$, $b = -1; -3; 2$, $c = 3; 6; -2$, $d = 1; -1; 2$.
- 4 Выяснить, является ли множество $V = x_1 = 2x_4$ подпространством в R^4 . Если да, то найти его базис и размерность.

В базисе e_1, e_2 вектор a имеет координаты $a = 4; 2$. Найти координаты вектора a относительно e_1', e_2' , если $e_1' = 3e_2$, $e_2' = 45e_1$.

Тема 10. Метод координат на плоскости (УК-1)

Лекция.

Аффинная система координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат. Деление отрезка в данном отношении. Ориентация плоскости. Угол между векторами на ориентированной плоскости. Формулы преобразования координат. Полярные координаты. Переход от полярных координат к декартовым и обратно.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Аффинная система координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат. Деление отрезка в данном отношении. Ориентация плоскости. Угол между векторами на ориентированной плоскости. Формулы преобразования координат. Полярные координаты. Переход от полярных координат к декартовым и обратно.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Найти координаты точки, равноудаленной от трех данных точек (5, 4), (3, 8), (-2, -7).
- 2 В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия MN, параллельная AC. Прямые BK и MN пересекаются в точке O. Найти координаты векторов CM, OB, KM, CB, NC и AN, принимая OC и OM за координатные векторы e_1 и e_2 .
- 3 Четырехугольник ABCD задан вершинами A(-1, 7), B(5, 5), C(7, -5), D(3, -7). Доказать, что отрезки, соединяющие середины сторон AD и BC, AB и CD, пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Тема 11. Прямая линия на плоскости (УК-1)

Лекция.

Различные способы задания прямой на плоскости: точкой и направляющим вектором; двумя точками; точкой и вектором нормали; параметрические и канонические уравнения прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой «в отрезках»; общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчлена. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми....

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Различные способы задания прямой на плоскости: точкой и направляющим вектором; двумя точками; точкой и вектором нормали; параметрические и канонические уравнения прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой «в отрезках»; общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчлена

$$Ax + By + C$$

. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Даны три вершины треугольника

$$A(1, -2), \quad B(0, 3), \quad C(1, 1)$$

. Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них параллельно противоположной стороне.

- 2 Даны вершины треугольника

$$A(1, 5), \quad B(-1, 2), \quad C(3, 2)$$

. Составить уравнения его высот.

- 3 Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$$B(5, 10)$$

и перпендикулярной к прямой

$$x - y + 1 = 0$$

4 Через точку пересечения прямых

$$3x - y = 0, \quad x + 4y - 2 = 0$$

проведена прямая, перпендикулярная к прямой

$$x + y = 0$$

. Написать уравнение этой прямой.

5 Написать уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми

$$l_1 : x + 2y - 7 = 0;$$

$$l_2 : 4x + 2y + 3 = 0.$$

Тема 12. Линии второго порядка (УК-1)

Лекция.

Эллипс. Гипербола. Парабола. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах. Директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Центр линий второго порядка. Касательная к линии второго порядка. Диаметры. Сопряженные направления. Главные направления. Главные диаметры. Оси. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Эллипс. Гипербола. Парабола. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах. Директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Центр линий второго порядка. Касательная к линии второго порядка. Диаметры. Сопряженные направления. Главные направления. Главные диаметры. Оси. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду.

Задания для самостоятельной работы.

1 Найти уравнение окружности, проходящей через точки (2, 3) и (3, 6) и касающейся прямой

$$2x + y - 2 = 0$$

2 Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

. Вычислить расстояния от концов большей оси до одной из директрис.

3 Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

, если ее эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{5}{4}$$

4 Уравнения асимптот гиперболы

$$y = \pm \frac{3}{4}$$

. Найти эксцентриситет.

5 Для равнобочной гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через точку

$$M(4, \sqrt{2})$$

.

6 На параболе

$$y^2 = 16x$$

найти точки, фокальный радиус которых равен 5.

7 Привести к каноническому виду и построить линию второго порядка

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$$

.

Привести к каноническому виду и построить линию второго порядка

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$$

.

Тема 13. Преобразования плоскости (УК-1)

Лекция.

Преобразования множества. Композиция преобразований. Группа преобразований. Подгруппа. Групповой подход к геометрии. Движения плоскости. Частные виды движений: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, центральная и скользящая симметрии. Свойства движений. Движение I и II рода. Классификация движений. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Преобразование подобия. Гомотетия. Свойства. Группа подобий и ее подгруппы. Аффинные преобразования плоскости. Свойства. Частные случаи аффинного преобразования: родство, подобие, движение. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Преобразования множества. Композиция преобразований. Группа преобразований. Подгруппа. Групповой подход к геометрии. Движения плоскости. Частные виды движений: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, центральная и скользящая симметрии. Свойства движений. Аналитическое задание. Движение I и II рода. Классификация движений. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Преобразование подобия. Гомотетия. Свойства. Аналитическое задание. Группа подобий и ее подгруппы. Аффинные преобразования плоскости. Свойства. Аналитическое задание. Частные случаи аффинного преобразования: родство, подобие, движение. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 В четырехугольнике ABCD: $AB = BC = 3$, $CD = 2$, $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$. Найти углы ABC и BCD.
- 2 Пусть A_1 , B_1 , C_1 – середины сторон треугольника ABC, O_1 , O_2 , O_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники AC_1B_1 , C_1BA_1 , CBA_1 . Найти углы треугольника $O_1O_2O_3$, если $AB = AC = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$.
- 3 Прямая, проходящая через середины сторон AB и CD четырехугольника ABCD, не являющегося трапецией, образует со сторонами AD и CD равные углы. Доказать, что $AD = CB$.

- 4 Доказать, что точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно прямых AB, AC, BC, принадлежат описанной около треугольника ABC окружности.
- 5 Точки C1 и C2 являются образами вершины C треугольника ABC при симметрии относительно прямых, содержащих биссектрисы углов BAC и ABC. Доказать, что середина отрезка C1C2 есть точка касания вписанной в треугольник окружности и стороны AB.
- 6 На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Прямые, проведенные через точки D и C перпендикулярно к AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и H. Доказать, что $KH = HB$.
- 7 В прямоугольном треугольнике ABC проведена медиана CM. На катетах AC и BC вне треугольника построены квадраты ACKH и BCDE. Доказать, что прямые CM и DK перпендикулярны.
- 8 Дан равносторонний треугольник ABC и произвольная точка M. Доказать, что длина большего из трех отрезков MA, MB, MC не больше суммы длин двух других.

Тема 14. Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов. (УК-1)

Лекция.

Аффинная система координат в пространстве. Прямоугольная декартова система координат. Ориентация пространства. Формулы преобразования координат в пространстве. Векторное произведение векторов. Площадь треугольника. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Аффинная система координат в пространстве. Прямоугольная декартова система координат. Ориентация пространства. Формулы преобразования координат в пространстве. Векторное произведение векторов. Площадь треугольника. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Дан треугольник ABC и произвольная точка O пространства. Обозначим через M – точку пересечения каких-либо двух медиан треугольника, а через r_1 , r_2 и r_3 , соответственно, векторы OA, OB и OC. Доказать, что $OM = \frac{1}{3}r_1 + r_2 + r_3$.
- 2 Для трех векторов $a = -1; 2; 1$, $b = 5; 1; 0$, $c = 4; -2; 0$ вычислить $b^2 + a + 3c$, $c \cdot b$.
- 3 Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(4; 2; 0)$, $B(1; -3; 2)$, $C(-1; 1; 1)$.
- 4 Найти смешанное произведение и определить ориентацию тройки векторов $a = 1; -1; 2$, $b = 0; 5; 1$, $c = 5; 4; -2$.
- 5 Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(0; 0; 0)$, $B(6; 8; -2)$, $C(4; 6; 10)$, $D(6; 0; -3)$.

Найти объем параллелепипеда ABCDA'B'C'D', построенного на векторах $AB(25; 0; 0)$, $AD(0; 1; 0)$, $AA'(0; 0; 4)$.

Тема 15. Плоскости и прямые в пространстве (УК-1)

Лекция.

Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости. Геометрический смысл знака многочлена. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Связка прямых. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости. Геометрический смысл знака многочлена

$$Ax + By + Cz + D$$

. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Связка прямых. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Задания для самостоятельной работы.

1 Дан тетраэдр:

$$A(-1, 2, 5), \quad B(0, -4, 5), \quad C(-3, 2, 1) \quad \text{и} \quad D(1, 2, 4)$$

. Написать уравнение плоскости, проходящей через вершину D и перпендикулярной стороне AB.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + z = 0$$

3 Составить уравнение касательной плоскости к сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

в точке

$$H(2, -3, 6)$$

4 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, -3, 4) и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

5 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, -3, 4) и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{5}$$

6 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(1 -2 1), B(3 1 -1).

7 Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1 -1 2), параллельно прямой $x-15=y-1-2=z+10$.

8 Привести к каноническому виду уравнения прямой $\{x+y-3z=0, 2x-3y+z-1=0$.

9 Известны уравнения двух прямых: $x-2-1=y-3=z-11$, $\{x-y+1=0, 2x+y-5z+1=0$. Являются ли эти прямые параллельными, перпендикулярными? Найти угол между этими прямыми.

10 Через точку M (1, 5, -1) провести прямую перпендикулярную прямой

$$\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

Лекция.

Аффинные преобразования. Движения. Подобия. Параллельный перенос. Поворот. Симметрии относительно точки, прямой и плоскости.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Аффинные преобразования. Движения. Подобия. Параллельный перенос. Поворот. Симметрии относительно точки, прямой и плоскости.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Можно ли взаимно-однозначно отобразить: а) поверхность куба на поверхность другого куба; б) поверхность куба на сферу; в) сферу с выколотой точкой на плоскость? Сделать соответствующие рисунки.
- 2 Даны точка O и фигура F . Рассмотрим все точки пространства, симметричные точке O относительно всех точек фигуры F . Какую фигуру они образуют, если фигура F : а) отрезок; б) прямая; в) плоскость; г) треугольник; д) куб; е) шар? Ответ пояснить на рисунке.
- 3 Даны точки $A(3; 2; 1)$ и $B(-1; 2; 6)$. Найти координаты образа точки B при композиции центральных симметрий: а) $ZAZO$, б) $ZOZA$, где точка O – начало координат.
- 4 Нарисовать треугольную пирамиду, имеющую две плоскости симметрии.
- 5 В кубе окрашены одним цветом три грани, имеющие общую вершину. Сколько плоскостей симметрии имеет окрашенный таким образом куб?
- 6 Точки A и B расположены в одном полупространстве относительно данной плоскости и не лежат в ней. Построить в плоскости такую точку M , сумма расстояний от которой до точек A и B была бы наименьшей
- 7 В основании пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро PA пирамиды перпендикулярно ее основанию. Через середину ребра PB проведено сечение, параллельное плоскости APD . Какова площадь сечения, если площадь грани APD равна 48?

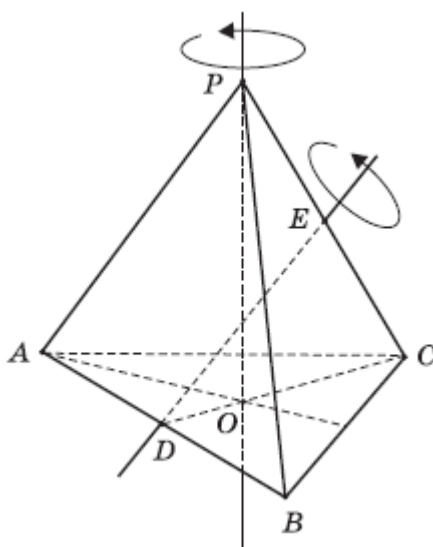


Рис. 1

- 1 Точки D и E – середины ребер AB и PC правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 1); точка O – центр грани ABC . Доказать, что при вращениях на угол 180° вокруг прямой DE и на углы 120° , 240° и 360° вокруг прямой OP данный тетраэдр отображается на себя (самосовмещается). Найти другие вращения, при которых данный тетраэдр самосовмещается.

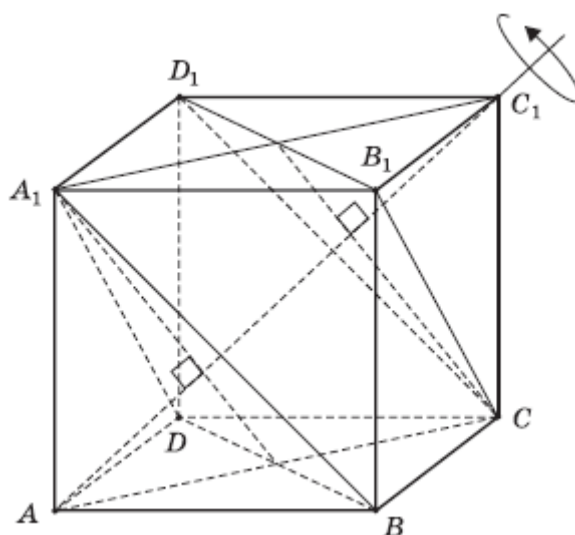


Рис. 2

- 1 Доказать, что при вращениях на углы 120° , 240° и 360° вокруг прямой AC_1 куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2) самосовмещается. Найти другие вращения, при которых данный куб самосовмещается.
- 2 Построить тетраэдр, имеющий одну ось симметрии.
- 3 Дан правильный тетраэдр $PABC$. Построить ось симметрии фигуры, являющейся объединением скрещивающихся ребер AP и BC правильного тетраэдра $PABC$.
- 4 Дан правильный тетраэдр $PABC$, точки P_1 , A_1 , B_1 , C_1 – центры его граней. Доказать, что тетраэдр $P_1 A_1 B_1 C_1$ подобен тетраэдру $PABC$, найти коэффициент этого подобия.

Тема 17. Поверхности второго порядка (УК-1)

Лекция.

Изучение эллипсоидов, гиперboloидов и параболоидов по их каноническим уравнениям. Цилиндры и конусы второго порядка. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Канонические сечения.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Изучение эллипсоидов, гиперboloидов и параболоидов по их каноническим уравнениям. Цилиндры и конусы второго порядка. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Канонические сечения.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Исследовать методом сечений и изобразить поверхность второго порядка

$$x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0.$$

- 2 Исследовать методом сечений и изобразить поверхность второго порядка

$$x^2 + y^2 - z^2 - z - 1 = 0.$$

- 3 Исследовать методом сечений и изобразить поверхность второго порядка

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8z - 3 = 0.$$

- 4 Исследовать методом сечений и изобразить поверхность второго порядка

$$2x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 8z - 8 = 0.$$

- 5 Определить, какая поверхность задана уравнением

$$x^2 + 2y^2 - 4z^2 - z - 3 = 0.$$

Определить, какая поверхность задана уравнением

$$4x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2z - 3 = 0.$$

Тема 18. Введение в анализ. Действительные числа. Функции действительного переменного (УК-1)

Лекция.

Действительные числа. Изображение действительных чисел на прямой. Расширения множества действительных чисел. Промежутки. Окрестности. Абсолютная величина. Целая и дробная части числа. Некоторые символы математической логики. Ограниченные множества на прямой. Понятие отображения и функции. Функции действительного переменного. График функции действительного переменного. Способы задания функций действительного переменного. Некоторые типы функций. Обратная функция. Суперпозиция функций.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Действительные числа. Изображение действительных чисел на прямой. Расширения множества действительных чисел. Промежутки. Окрестности. Абсолютная величина. Целая и дробная части числа. Некоторые символы математической логики. Ограниченные множества на прямой. Понятие отображения и функции. Функции действительного переменного. График функции действительного переменного. Способы задания функций действительного переменного. Некоторые типы функций. Обратная функция. Суперпозиция функций.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Найти промежуток, который является образом отрезка $1;3$ при отображении

$$f = 3x^3 + 2.$$

- 2 Найти промежуток, который является образом интервала $-2;3$ при отображении

$$f = 2x^2 + 1.$$

- 3 Установить соответствие между промежутками

а) $-1;8$;

б) $-1;8$;

в) $-8;1$;

г) $-8;1$.

и их образами при отображении

$$y = 2\sqrt[3]{x} + 4$$

:

A= $0;6$;

B= $2;8$;

C= $2;8$;

D= $(0;6]$;

E= $[2;8)$;

F= $0;6$.

- 1 Найти область определения функции

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2} + \lg(x + 3).$$

- 2 Найти количество целых чисел, принадлежащих области определения функции

$$y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$$

3 Найти наибольшее значение y из области значений функции

$$y = -2x^2 - 4x + 4$$

4 Пусть $fx=x$. Выбрать функции gx , при которых сложная функция gfx является четной:

а) $gx=3x$; б) $gx=x+3$; в) $gx=3x^4+2$; г) $gx=3x$; д) $gx=6x^2$.

Построить графики функций $y_1=3-x$; $y_2=2-3\sin 2x$.

Тема 19. Предел последовательности. Предел функции (УК-1)

Лекция.

Сходящиеся последовательности. Бесконечные пределы. Частичные пределы. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Переход к пределу в неравенствах. Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Неопределенности. Сходимость монотонной последовательности. Число e . Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Теоремы о пределах. Односторонние пределы. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Сходящиеся последовательности. Бесконечные пределы. Частичные пределы. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Переход к пределу в неравенствах. Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Неопределенности. Сходимость монотонной последовательности. Число e . Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Теоремы о пределах. Односторонние пределы. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

Задания для самостоятельной работы.

1 Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением $a_{n+1}=3a_n-4$, $a_1=3$. Найти четвертый член этой последовательности.

2 Определить общий член последовательности

$$1, -1, \frac{7}{9}, -\frac{5}{8}, \square$$

а) $a_n=3n-2n^2$; б) $a_n=-1n+13n-2n^2$; в) $a_n=-1n3n-2n^2$; г) $a_n=-1n+13n+2n^2$.

1 Выбрать интервал, который может являться ε -окрестностью точки

$$x = 5,3$$

а) 5,3;5,7;

б) 4,9;5,3;

в) 5,1;5,5;

г) 5,1;5,8.

1 Выбрать множество, которому может принадлежать ε -окрестность числа (точки)

$$x = -4$$

а) $(-5;-4] \cup (-4;-3)$; б) $(-6;-2] \cup (-4;0)$; в) $(-5;-3) \cup (-4;-2)$; г) $(-6;-2] \cup (-3;-1)$.

1 Задано множество точек на числовой прямой:

$$a = 1$$

;

$$b = -0,5$$

;

$$c = 2,2$$

;

$$d = 0,3$$

;

$$e = -0,25$$

;

$$f = -1$$

. Определить количество точек этого множества, принадлежащих ε -окрестности точки

$$x = 1$$

, если

$$\varepsilon = 1,1$$

.

2 Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

, если

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}, \quad n \in N$$

.

3 Вычислить предел:

а)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{n^3 - 1}$$

;

б) $3 - 4n^2n - 33 - n + 33$;

в) $n!n + 1! - n!$;

г)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 5}$$

;

д)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 3}{x + 5}$$

;

е)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}$$

;

ж)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$$

;
3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

;
и)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$$

.

1 Установить соответствие между пределами последовательностей

1) $n+12n-124n-1$; 2); 3); 4)

и их значениями

а) 0; б) ∞ ; в) $-1,5$; г) 1; д) $-\infty$.

1 Установить соответствие между пределами функций

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 1}{3x^3 + 2x^2 + 2}$$

; 2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 2}{x^3 + 4x + 1}$$

; 3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 6x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + x}$$

; 4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 + 3}{3x^3 + x - 1}$$

и их значениями

а) 1; б) 0; в) 2; г)

$$\frac{2}{3}$$

; д)

$$\frac{1}{3}$$

; е) ∞ .

1 Найти постоянные а и в из условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

.

2 Вычислить предел:

а)

$$\lim_{x \rightarrow -2-} 5^{\frac{4}{x+2}}$$

;

б)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}}$$

;

в)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

;

г)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

;

д)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-3} \right)^{5x}$$

;

е)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$$

;

ж)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

;

з)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

;

и)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

.

1 С помощью второго замечательного предела и следствий из него вычислить предел:

а)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^x$$

;

б)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+4}{8x-3} \right)^{x-9}$$

;

в)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-9} \right)^{9x-1}$$

;

г)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 7x + 5}{4x^2 + 5x} \right)^{2x+1}$$

;

д)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$$

;

е) $1 + \sin x$;ж) $e^{3x} - 1 \ln 1 + 2x$;з) $e^{3x} \sin 4x \ln 1 + \sin x$;

и)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\operatorname{arctg} 2x}.$$

Тема 20. Непрерывность. Элементарные функции (УК-1)

Лекция.

Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Теорема об обращении функции в 0 (I теорема Больцано-Коши). Теорема о промежуточном значении (II теорема Больцано-Коши). Теорема о множестве значений непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Обратные тригонометрические функции. Теорема об ограниченности непрерывной функции (I теорема Вейерштрасса). Теорема о наибольшем значении (II теорема Вейерштрасса). Степень. Степенная функция. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Гиперболические функции. Некоторые замечательные пределы, связанные с элементарными функциями.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Теорема об обращении функции в 0 (I теорема Больцано-Коши). Теорема о промежуточном значении (II теорема Больцано-Коши). Теорема о множестве значений непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Обратные тригонометрические функции. Теорема об ограниченности непрерывной функции (I теорема Вейерштрасса). Теорема о наибольшем значении (II теорема Вейерштрасса). Степень. Степенная функция. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Гиперболические функции. Некоторые замечательные пределы, связанные с элементарными функциями.

Задания для самостоятельной работы.

1 Найти приращение

$$\Delta y$$

функции

$$y = -x^2$$

при изменении значения аргумента от

$$-2$$

до 3.

2 Указать верные утверждения, если

$$x \rightarrow 1$$

:

а)

$$\sin x \sim x$$

; б) $\sin x - 1 \sim x - 1$; в) $\sin x + 1 \sim x + 1$; г)

$$\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

.

1 Известно, что при

$$x \rightarrow x_0$$

бесконечно малые α и β удовлетворяют условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1000$$

. Какое из следующих утверждений верно?

а)

$$\alpha(x)$$

более высокого порядка малости, чем

$$\beta(x)$$

;

б)

$$\alpha(x)$$

более низкого порядка малости, чем

$$\beta(x)$$

;

в)

$$\alpha(x)$$

и

$$\beta(x)$$

одного порядка малости;

г)

$$\alpha(x)$$

и

$$\beta(x)$$

эквивалентны;

д)

$$\alpha(x)$$

и

$$\beta(x)$$

нельзя сравнивать.

- 1 Из перечисленных значений аргумента выбрать точки разрыва дробно-рациональной функции $y = x + 3x + 1$:

а)

$$x = 1$$

; б)

$$x = 0$$

; в)

$$x = -1$$

; г)

$$x = -3$$

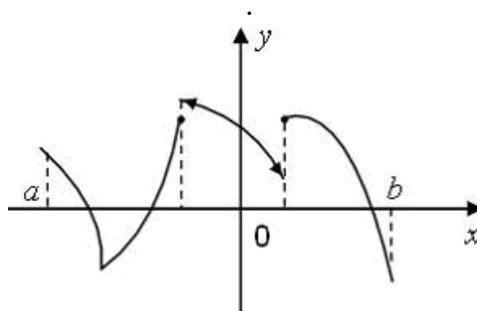


Рис. 3.

- 1 Найти число точек разрыва функции, заданной на отрезке $a;b$, график которой имеет вид (рис. 3).
- 2 Определить количество точек разрыва функции

$$y = \frac{x - 2}{x(x^2 - 1)^3(x^4 + 4)}$$

- 3 Известно, что

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = 10$$

. Какое из следующих утверждений верно?

а)

$$x = c$$

– точка устранимого разрыва;

б)

$$x = c$$

– точка разрыва первого рода;

в)

$$x = c$$

– точка разрыва второго рода;

г)

$$x = c$$

– точка непрерывности.

1 Указать, на каком из данных отрезков уравнение

$$\lg x + x - 2 = 0$$

имеет действительный корень:

а) 1;2; б) 2;3; в) 3;5; г) действительных корней нет.

1 Вычислить предел иррациональной функции:

а)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

;

б)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

;

в)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

;

г)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

;

д) $x - x^2 - x + 1$;е) $5x^4 - 25x^2 - x + 2$.

1 Вычислить предел трансцендентной функции:

а)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{14x}$$

;

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}$$

;

в)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{\operatorname{tg} x}$$

;

г)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$$

;

д)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

;

е)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 3) \sin \frac{2}{3x}$$

;

ж)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{3x \cdot \sin 2x \cdot \cos x}$$

;

з)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin^3 4x \cdot \operatorname{tg}^2 3x}{\cos x^2 \cdot \arcsin 8x^6}$$

;

и) $\sin 9x - 9 - 8x^2 + 6x - 2$.

1 Вычислить предел:

а)

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{n+3}$$

;

б) $1 + 4x^3 - 5x^2 + 3x$;

в)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$$

;

г)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

;

д)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - n^3}{2n^3 + 3n}$$

;

е)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$$

;

ж)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{1 - 5x}$$

;

з)

$$\lim_{x \rightarrow 2-} e^{\frac{x-3}{x(x-2)}}$$

;

и) $x^2 - 3x + 7x - 72$.

1 Найти точки разрыва функции, установить их характер и построить график функции в окрестности точек разрыва:

а)

$$y = 10^{\frac{x}{x-1}}$$

;

б)

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{при } x \in (-2; 0], \\ -1, & \text{при } x \in (0; 3), \\ -x + 5, & \text{при } x \in [3; \infty); \end{cases}$$

в)

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

;

г)

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

.

Лекция.

Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Производные некоторых элементарных функций. Теорема о линейном приближении. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила вычисления производной. Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование. Производные высших порядков.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Производные некоторых элементарных функций. Теорема о линейном приближении. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила вычисления производной. Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование. Производные высших порядков.

Задания для самостоятельной работы.

1 Пользуясь определением производной доказать, что:

а)

$$(x^2)' = 2x;$$

б)

$$(\cos x^2)' = -2x \sin x^2.$$

1 Вычислить производную

$$y'$$

функции:

а)

$$y = \sin(3x) - \frac{\cos x}{x^3};$$

б)

$$y = \cos(6 \ln x) + \operatorname{ctg} x^7;$$

в)

$$y = \ln x \arcsin x - x^5 \operatorname{ctg} x;$$

г)

$$y = \log_2(\sin x^2);$$

д)

$$y = \operatorname{tg}(x \lg x);$$

е)

$$y = (\sin x)^{\cos x};$$

ж)

$$y = x^4 \operatorname{ctg}^3 x \sqrt{9 + e^{5x}};$$

з)

$$y = \operatorname{arctg}(x^{\operatorname{tg} x});$$

и)

$$x^2 + y^3 = \sin(xy).$$

1 Найти дифференциал

 dy

функции:

а)

$$y = \arcsin(0.2x);$$

б)

$$y = xe^{-x};$$

в)

$$y = \sqrt{a^2 + x^2};$$

г)

$$y = \ln(3 - x^4);$$

д)

$$y = \frac{\lg x}{x};$$

е)

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

1 С помощью дифференциала первого порядка найти приближенное значение следующей величины:

а)

$$\sqrt[3]{1.03};$$

б)

$$\sin 27^\circ;$$

в)

$$0.997;$$

г)

$$\log_2 2.01.$$

Тема 22. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения к исследованию функций (УК-1)

Лекция.

Условие постоянства функций. Условие монотонности функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость функции. Точки перегиба. Схема исследования и построения графика функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Определение дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Условие постоянства функций. Условие монотонности функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость функции. Точки перегиба. Схема исследования и построения графика функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Определение дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 На отрезке $[0,4]$ кривая задана уравнением

$$y = x^2 - 2x + 4$$

. Найти абсциссу точки кривой, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы этой кривой.

- 2 На отрезке

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \quad y = \sin t$$

. Найти ординату точки кривой, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы этой кривой.

- 3 Выбрать выражения, которым будет равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{arctg} x^2}$$

, если к нему применить правило Лопиталя:

а) $\sin x$; б) $1+x^2$; в) $2x$; г) $0,5$.

- 1 Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = x + 1x + 2x + 3.$$

- 1 Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $1; e$.

- 2 Объяснить, почему неверна формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на отрезке $-1; 1$.

- 3 Вычислить предел функции:

а)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 3x^4 + 5x - 3}{2x^5 + 3x^4 - 5x}$$

;

б)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$$

;

в)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

;

г) $\pi - 2x \ln 1 + 1x$;

д) $\arcsin x$;

е)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

;

ж)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$$

;

з) $\ln x - 1$ πx ;и) $x \sin 2x$.1 Разложить многочлен $Px = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням двучлена

$$x - 1$$

.

2 Дана функция

$$P(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$$

. Найти первые три члена разложения по формуле Тейлора в окрестности точки

$$x_0 = 1$$

. Подсчитать приближенно

$$P(1,03)$$

.

3 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции

$$y = \frac{x}{x-1}$$

в окрестности точки

$$x_0$$

=2.

4 Написать формулу Тейлора -го порядка для функции

$$y = x^3 \ln x$$

по степеням

$$x - 1$$

.

5 Проверить, что ошибка, которая получается при вычислении значений функции

$$\sin x$$

по формуле

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

, будет меньше 0,000001, если угол x меньше 28° . Пользуясь этим, вычислить

$$\sin 20^\circ$$

с шестью верными знаками.

6 Исследовать функцию и построить ее график:

а)

$$y = x(x^2 - 1)^2$$

; б)

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

; в)

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

; г)

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

; д)

$$y = xe^{-x}$$

; е)

$$y = \frac{\ln|x|-1}{\ln|x|+1}$$

; ж)

$$y = x^2 - 7|x+1| + 3$$

; з)

$$y = x^2/(x^4 + 1)$$

; и)

$$y = xe^{-x^2}$$

.

Тема 23. Интегральное исчисление функций одного переменного. Неопределенный интеграл (УК-1)

Лекция.

Понятие первообразной. Определение неопределенного интеграла и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование простых дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Понятие первообразной. Определение неопределенного интеграла и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование простых дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1. – 30. вычислить неопределенный интеграл.

$$1 \quad \int \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$2 \quad \int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$3 \quad \int \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1} dx.$$

$$4 \quad x^2 + 2x + 3 \cos x \, dx.$$

$$5 \quad \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$6 \quad x^2 + 2x - 3 \, dx.$$

$$7 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}} dx.$$

$$8 \quad \int \cos^4 x \, dx.$$

$$9 \quad \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$10 \quad \int \frac{1}{x \sqrt{5x^2 - 2x + 1}} dx.$$

$$11 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x + 5}}.$$

$$12 \quad \int \sqrt[3]{5 - 2x} \, dx.$$

$$13 \quad \int \frac{dx}{\cos^2(2 - 3x)}.$$

$$14 \quad \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$$

$$15 \quad \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{x} dx.$$

$$16 \quad \int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$17 \quad \int \frac{\sqrt[3]{3x + 4}}{1 + \sqrt[3]{3x + 4}} dx.$$

$$18 \quad \int \frac{\sqrt{2x + 1}}{3 + \sqrt{2x + 1}} dx.$$

- 19 $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx.$
- 20 $\int x^2 \log_2 x dx.$
- 21 $\int x \arcsin x dx.$
- 22 $\int x^2 \ln(x+1) dx.$
- 23 $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx.$
- 24 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)}.$
- 25 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)}.$
- 26 $dx^4-5x^4.$
- 27 $\int \sqrt[5]{7-3x} dx.$
- 28 $\int \frac{1-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2} dx.$
- 29 $\int (x+1)^2 \ln x dx.$
- 30 $\int \frac{x dx}{x^3-1}.$

Тема 24. Определенный интеграл.

Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы. (УК-1)

Лекция.

Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Линейность определенного интеграла. Аддитивность определенного интеграла (по промежутку). Неравенства для определенного интеграла. Теорема о среднем значении. Интеграл по ориентированному отрезку. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площади в декартовых координатах. Вычисление площади в полярных координатах. Вычисление объемов с помощью определенного интеграла. Спрямолинейные кривые. Длина гладкой кривой. Площадь поверхности вращения. Интегралы по бесконечному промежутку. Интеграл от неограниченной функции.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Линейность определенного интеграла. Аддитивность определенного интеграла (по промежутку). Неравенства для определенного интеграла. Теорема о среднем значении. Интеграл по ориентированному отрезку. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площади в декартовых координатах. Вычисление площади в полярных координатах. Вычисление объемов с помощью определенного интеграла. Спрямолинейные кривые. Длина гладкой кривой. Площадь поверхности вращения. Интегралы по бесконечному промежутку. Интеграл от неограниченной функции.

Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1. – 20. вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

$$\int_1^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$\int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$\int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+1}.$$

$$\int_{-1}^0 x e^{-x} dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 6x + 11}.$$

$$\int_0^1 \arctg x dx.$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$$

$$\int_0^1 4x \arcsin x dx.$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx.$$

122x-310dx.

$$\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{x + \sqrt{x+1}}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx.$$

$$\int_1^2 \frac{xdx}{2x^2 - 1}.$$

$$\int_{-1}^0 9x^2 \ln(x+2) dx.$$

1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0.$$

2 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 1$$

,

$$x = 5$$

,

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0$$

.

3 Найти площадь, ограниченную параболой

$$y = 4x - x^2$$

и осью Ох.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$$

.

5 Найти площадь фигуры, ограниченной дугами парабол

$$y = \frac{x^2}{4}$$

и

$$y = 3 - \frac{x^2}{2}$$

.

6 Найти площадь, ограниченную кривыми

$$y = e^x, \quad y = e^{-x}$$

и прямой

$$x = 1$$

7 Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой

$$y = -x$$

от параболы

$$y = 2x - x^2$$

8 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\rho = a \sin 4\varphi.$$

9 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = x(4 - x), \quad y = 0$$

вокруг оси Oy.

10 Найти длину дуги кривой $y^2 = 16x$ от точки (0;0) до точки 2;42.

Тема 25. Ряды. Числовые ряды (УК-1)

Лекция.

Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости ряда. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток ряда. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения рядов с положительными членами. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Условно сходящиеся ряды. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости ряда. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток ряда. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения рядов с положительными членами. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Условно сходящиеся ряды. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1. – 8. исследовать на сходимость.

1

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; \quad 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; \quad 4) \sum \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \arctg^n \frac{1}{n}; \quad 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; \quad 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

2

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; \quad 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; \quad 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; \quad 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

3

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; \quad 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; \quad 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; \quad 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

4

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; \quad 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; \quad 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; \quad 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

5

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; \quad 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; \quad 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; \quad 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

6

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \arctg^n \frac{1}{n}; 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

7

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \arctg^n \frac{1}{n}; 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

8

Исследовать на сходимость:

$$1) \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1}; 2) \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; 3) \sum (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{n}; 4) \sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}.$$

$$5) \sum \arctg^n \frac{1}{n}; 6) \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}; 7) \sum (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}; 8) \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)^3}.$$

Тема 26. Функциональные последовательности и ряды (УК-1)

Лекция.

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность предельной функции и суммы степенного ряда. Интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов. Дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность предельной функции и суммы степенного ряда. Интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов. Дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов.

Тема 27. Степенные ряды. Ряды Фурье (УК-1)

Лекция.

Степенные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Задача о разложении функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в степенной ряд. Разложение в степенной ряд показательной функции. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций. Разложение в степенной ряд логарифмической функции. Разложение в степенной ряд $\arctg \frac{f_0}{x}$. Биномиальный ряд. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Степенные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Задача о разложении функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в степенной ряд. Разложение в степенной ряд показательной функции. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций. Разложение в степенной ряд логарифмической функции. Разложение в степенной ряд Биномиальный ряд. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Разложить функцию

$$f(x) = |\cos x|$$

в ряд Фурье в интервале

$$(-\pi, \pi),$$

построить график суммы ряда и данной функции.

- 2 Разложить функцию

$$f(x) = \sin 3x$$

в ряд Фурье в интервале

$$(-\pi, \pi)$$

- 3 Разложить функцию

$$f(x) = x \sinh x$$

в ряд Фурье в интервале

$$(-l, l)$$

- 4 Разложить в ряд Фурье в интервале

$$(-\pi, \pi)$$

функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ -3x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Тема 28. Функции нескольких переменных (УК-1)

Лекция.

Сходимость в пространстве R^n . Векторные функции действительного переменного. Открытые и замкнутые множества. Области. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Сходимость в пространстве R_n . Векторные функции действительного переменного. Открытые и замкнутые множества. Области. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

Задания для самостоятельной работы.

1

1. Найти область определения данных функций:

$$1) z = \frac{x}{y}; \quad 2) z = \frac{3}{x^2+y^2}; \quad 3) z = \sqrt{xy}; \quad 4) z = \arccos(x+y);$$

$$5) z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad 6) z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}; \quad 7) z = \ln xy; \quad 8) u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Тема 29. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (УК-1)

Лекция.

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Дифференцируемость гладкой функции. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, существованием частных производных и непрерывностью. Дифференцируемость суперпозиции. Дифференциал суперпозиции. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Дифференцируемость гладкой функции. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, существованием частных производных и непрерывностью. Дифференцируемость суперпозиции. Дифференциал суперпозиции. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.

Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1. – 10. найти частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

функции

$$z = z(x, y),$$

не упрощая полученные выражения.

1

$$z = \sin \frac{x^3}{y+1}.$$

2

$$z = \cos \frac{y-1}{e^x}.$$

3

$$z = \ln(x^2 + \frac{y}{\sqrt{x}}).$$

4

$$z = e^{\frac{x^3}{y^2}}.$$

$$5) z = \ln y^3 - 2x^2.$$

6

$$z = \sin \frac{y^3}{x^4}.$$

7

$$z = \cos(\sqrt{2x + 4y}).$$

8

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^3}.$$

9

$$z = \operatorname{arcctg} \left(\frac{y^2}{x} \right).$$

10

$$z = e^{\sin \frac{x}{y}}.$$

11 Найти

$$\frac{du}{dt}$$

от функции $u = ex - 2y$, где $x = \sin t$, $y = t^3$.

12 Найти

$$\frac{dz}{du}$$

и

$$\frac{dz}{dv}$$

от функции $z = x^2 \ln y$, где $x = uv$, $y = 3u - 2v$.

13 Найти дифференциалы второго порядка от функции $z = xy^2 - x^2y$.

Тема 30. Экстремумы функций нескольких переменных (УК-1)

Лекция.

Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1. – 10. исследовать на экстремум функцию

$$z = z(x, y).$$

1

$$z = (x-1)^2 + 2y^2.$$

2

$$z = x^2 + xy + y^2 + 2x - y.$$

3

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 6x + 1.$$

4

$$z = (x-1)^2 - 2y^2.$$

5

$$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

6	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$
7	$z = 6(x - y) - 3y^2 - 3x^2.$
8	$z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$
9	$z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$
10	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

Тема 31. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойной интеграл (УК-1)

Лекция.

Определение двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Объем тела. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения двойного интеграла.

Практическое занятие.

проводится в форме семинара и включает решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач и упражнений, выполнение чертежей по темам: Определение двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Объем тела. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения двойного интеграла.

Задания для самостоятельной работы.

- 1 Записать в виде повторного интеграла

$$\iint G f(x, y) dx dy,$$

если область G задана неравенствами: $x+y \leq 2$, $x-y \leq 2$, $x \geq 0$.

- 1 Поменять порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{x-2}^{2-x} f(x, y) dy.$$

- 1 Вычислить интеграл

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} xy dx dy.$$

- 1 Вычислить двойной интеграл

$$\iint G (x-y) dx dy,$$

если область G ограничена линиями: $y=x$, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$.

- 1 Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования.

$$\iint G f(x, y) dx dy, \quad G: x^2 + y^2 \leq -4y.$$

- 1 Вычислить, перейдя к полярным координатам.

$$\iint G \ln(x^2 + y^2) x^2 + y^2 dx dy,$$

где G – кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = e^2$.

- 1 Построить область, площадь которой выражена интегралом

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy.$$

Вычислить этот интеграл.

- 1 Изобразить на чертеже тело, объем которого выражается интегралом

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x^2+y^2} dy$$

и вычислить его объем.

4. Контроль знаний обучающихся и типовые оценочные средства

4.1. Распределение баллов:

1 семестр

- посещаемость – 10 баллов

- текущий контроль – 52 балла
- контрольные срезы – 2 среза по 4 балла каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ те мы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Введение в алгебру	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>

		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает
2.	Решение систем линейных алгебраических уравнений. Векторные арифметические пространства	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке: - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. 2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо. 1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает

3.	Матрицы	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

4.	Определители	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

5.	Алгебраические системы. Группы	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

6.	Кольца и поля	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

7.	Кольцо многочленов от одной переменной. Поле отношений	Устный опрос, письменн ая контроль ная работа, тестирова ние.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменн ая контроль ная работа, тестирова ние.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

8.	Корни многочленов	Устный опрос, письмен ная контроль ная работа, тестирова ние.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письмен ная контроль ная работа, тестиров ание.(кон трольны й срез)	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
9.	Посещаемость		10	<p>10 баллов – студент посетил все</p> <p>100% занятий</p> <p>7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий</p> <p>4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий</p> <p>1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий</p> <p>Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются</p>

10.	Премияльные баллы	20	Дополнительные премиальные баллы могут быть начислены: - за проект, выполненный по заказу работодателя и реализованный на практике – 20 баллов; - постоянная активность во время практических занятий – 10 баллов; - полностью подготовленная к публикации статья по тематике в рамках дисциплины – 10 баллов; - участие с докладом во всероссийской олимпиаде по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - участие в выставке по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - публикация статьи по тематике изучаемой дисциплины в сборнике студенческих работ / материалах всероссийской конференции / журнале из перечня ВАК – 10 / 15 / 20
11.	Ответ на экзамене	30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
12.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы	20	Решение кейса (10 баллов) Прохождение тестирования (30 вопросов) по всему курсу дисциплины (10 баллов)
13.	Итого за семестр	100	

2 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 52 балла
- контрольные срезы – 2 среза по 4 балла каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ темы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мак. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
--------	------------------------------------	---------------------------------	--------------------	--------------------------------------

1.	Элементы векторной алгебры в пространстве	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный.</p> <p>Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

2.	Метод координат на плоскости	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

3.	Прямая линия на плоскости	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

4.	Линии второго порядка	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

5.	Преобразование плоскости	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

6.	Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведения векторов.	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
7.	Плоскости и прямые в пространстве	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
8.	Преобразование пространства	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>

		Устный опрос, письмен ная контроль ная работа, тестиров ание.(кон трольны й срез)	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает
9.	Посещаемость		10	10 баллов – студент посетил все 100% занятий 7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий 4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий 1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются
10.	Премияльные баллы		20	Дополнительные премияльные баллы могут быть начислены: - за проект, выполненный по заказу работодателя и реализованный на практике – 20 баллов; - постоянная активность во время практических занятий – 10 баллов; - полностью подготовленная к публикации статья по тематике в рамках дисциплины – 10 баллов; - участие с докладом во всероссийской олимпиаде по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - участие в выставке по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - публикация статьи по тематике изучаемой дисциплины в сборнике студенческих работ / материалах всероссийской конференции / журнале из перечня ВАК – 10 / 15 / 20
11.	Ответ на экзамене		30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
12.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы		20	Решение кейса (10 баллов) Прохождение тестирования (30 вопросов) по всему курсу дисциплины (10 баллов)
13.	Итого за семестр		100	

3 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 52 балла
- контрольные срезы – 2 среза по 4 балла каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ те мы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мах. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
1.	Поверхности второго порядка	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>

		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает
2.	Введение в анализ. Действительные числа. Функции действительного переменного	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке: - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. 2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо. 1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает

3.	Предел последовательности. Предел функции	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный.</p> <p>Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>

4.	Непрерывность · Элементарные функции	Устный опрос, письмен ая контроль ная работа, тестирова ние.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письмен ая контроль ная работа, тестирова ние.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
5.	Дифференциал ьное исчисление функций одного переменного. Производная.	Устный опрос, письмен ая контроль ная работа, тестирова ние.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
6.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения к исследованию функций	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>

		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает
7.	Интегральное исчисление функций одного переменного. Неопределенный интеграл	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д. 5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо. 3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте 2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте. Менее 25% правильных ответов баллов не дает

8.	<p>Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.</p>	<p>Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.</p>	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		<p>Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)</p>	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
9.	Посещаемость		10	<p>10 баллов – студент посетил все 100% занятий</p> <p>7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий</p> <p>4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий</p> <p>1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий</p> <p>Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются</p>

10.	Премияльные баллы	20	Дополнительные премиальные баллы могут быть начислены: - за проект, выполненный по заказу работодателя и реализованный на практике – 20 баллов; - постоянная активность во время практических занятий – 10 баллов; - полностью подготовленная к публикации статья по тематике в рамках дисциплины – 10 баллов; - участие с докладом во всероссийской олимпиаде по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - участие в выставке по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - публикация статьи по тематике изучаемой дисциплины в сборнике студенческих работ / материалах всероссийской конференции / журнале из перечня ВАК – 10 / 15 / 20
11.	Ответ на экзамене	30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
12.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы	20	Решение кейса (10 баллов) Прохождение тестирования (30 вопросов) по всему курсу дисциплины (10 баллов)
13.	Итого за семестр	100	

4 семестр

- посещаемость – 10 баллов
- текущий контроль – 52 балла
- контрольные срезы – 2 среза по 4 балла каждый
- премиальные баллы – 20 баллов
- ответ на экзамене: не более 30 баллов

Распределение баллов по заданиям:

№ темы	Название темы / вид учебной работы	Формы текущего контроля / срезы	Мак. кол-во баллов	Методика проведения занятия и оценки
--------	------------------------------------	---------------------------------	--------------------	--------------------------------------

1.	Ряды. Числовые ряды	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	2	<p>Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:</p> <ul style="list-style-type: none"> - правильность ответа по содержанию; - полнота и глубина ответа; - сознательность ответа; - логика изложения материала; - рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи; - своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе; - использование дополнительного материала; - рациональность использования времени, отведенного на задание. <p>2 балла - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>1 балл – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

2.	Функциональные последовательности и ряды	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

3.	Степенные ряды. Ряды Фурье	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

4.	Функции нескольких переменных	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

5.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

6.	Экстремумы функций нескольких переменных	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>

7.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойной интеграл	Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.	5	<p>Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.</p> <p>5 баллов - студент умеет применять полученную при подготовке к практическому занятию информацию, отвечать на большинство вопросов, вести дискуссию с испо.</p> <p>3 балла – студент владеет теоретическим материалом по теме практического занятия, иногда затрудняется при ответе на вопросы, не умеет сформулировать свою точку зрения на обсуждаемую проблему</p> <p>Если студент не владеет проблематикой практического занятия, не может отвечать на вопросы, зачитывает ответ по напечатанному тексту – ответ баллами не оценивается.</p>
		Устный опрос, письменная контрольная работа, тестирование.(контрольный срез)	4	<p>4 балла – студент правильно отвечает на 50-100% вопросов в тесте</p> <p>2 балла - студент правильно отвечает на 25-50% вопросов в тесте.</p> <p>Менее 25% правильных ответов баллов не дает</p>
8.	Посещаемость		10	<p>10 баллов – студент посетил все 100% занятий</p> <p>7-9 баллов – студент посетил не менее 80% занятий</p> <p>4-6 баллов – студент посетил не менее 50% занятий</p> <p>1-3 балла – студент посетил не менее 25% занятий</p> <p>Если студент посетил менее 25% занятий, баллы не начисляются</p>

9.	Премияльные баллы	20	Дополнительные премиальные баллы могут быть начислены: - за проект, выполненный по заказу работодателя и реализованный на практике – 20 баллов; - постоянная активность во время практических занятий – 10 баллов; - полностью подготовленная к публикации статья по тематике в рамках дисциплины – 10 баллов; - участие с докладом во всероссийской олимпиаде по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - участие в выставке по тематике изучаемой дисциплины – 20 баллов; - публикация статьи по тематике изучаемой дисциплины в сборнике студенческих работ / материалах всероссийской конференции / журнале из перечня ВАК – 10 / 15 / 20
10.	Ответ на экзамене	30	10-17 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «удовлетворительно» 18-24 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «хорошо», 25-30 баллов – студент раскрыл основные вопросы и задания билета на оценку «отлично».
11.	Индивидуальные задания, с помощью которых можно набрать дополнительные баллы	20	Решение кейса (10 баллов) Прохождение тестирования (30 вопросов) по всему курсу дисциплины (10 баллов)
12.	Итого за семестр	100	

Итоговая оценка по экзамену выставляется в 100-балльной шкале и в традиционной четырехбалльной шкале. Перевод 100-балльной рейтинговой оценки по дисциплине в традиционную четырехбалльную осуществляется следующим образом:

100-балльная система	Традиционная система
85 - 100 баллов	Отлично
70 - 84 баллов	Хорошо
50 - 69 баллов	Удовлетворительно
Менее 50	Неудовлетворительно

4.2 Типовые оценочные средства текущего контроля

**Устный опрос, письменная
контрольная работа,
тестирование.**

Тема 1. Введение в алгебру

Символика математической логики. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратное отображение. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Факторизация отображений. Отношение порядка. Перестановки. Мощность множества перестановок. Произведение перестановок. Степень перестановки. Циклическая структура перестановки. Четность и знак перестановки. Понятие числа. Натуральные числа. Рациональные числа. Действительные числа. Комплексные числа. Операции над комплексными числами.

Указать несколько элементов множества. Привести пример двух собственных подмножеств множества. Изобразить графически.

Для произвольных множеств доказать утверждение, либо привести контрпример и проиллюстрировать его диаграммой Эйлера-Венна.

Среди множеств указать такие множества, для которых соответствие является:

- 1) отображением (доказать);
- 2) сюръективным, но не инъективным отображением;
- 3) инъективным, но не сюръективным отображением;
- 4) биективным отображением.

Являются ли функции инъективными, сюръективными, биективными?

Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) обладает бинарное отношение на множестве. Если оно является эквивалентностью, то описать классы эквивалентности. Если это отношение порядка, то охарактеризовать этот порядок.

з) – множество многоугольников плоскости, многоугольник подобен многоугольнику.

Найти степень и определить знак (четность) перестановки, найти обратную перестановку, разложить перестановку в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.

Даны комплексные числа. Найти мнимую и действительную части комплексных чисел.

Тема 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Векторные арифметические пространства

Система линейных алгебраических уравнений. Равносильность систем.

Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Применение метода Гаусса к исследованию и решению систем. Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя второго порядка. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Понятие определителя третьего порядка. Арифметическое векторное пространство.

Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Базис. Размерность.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

Исследовать решение системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от значений параметра.

Выяснить, образует ли система векторов базис в V . Если да, то разложить по этому базису вектор v .

Выяснить, является ли данное множество подпространством в V . Если да, то найти его базис и размерность.

Тема 3. Матрицы

Ранг системы векторов. Строчечный и столбцевой ранги матрицы. Ранг матрицы.

Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения. Структура множества

решений совместной системы. Общее решение однородной системы. Общее решение неоднородной системы. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Оценка ранга произведения матриц. Транспонирование. Квадратные матрицы. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы. Использование обратной матрицы для решения систем.

Ранг системы векторов. Строчечный и столбцовый ранги матрицы. Ранг матрицы. Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения. Структура множества решений совместной системы. Общее решение однородной системы. Общее решение неоднородной системы. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Оценка ранга произведения матриц. Транспонирование. Квадратные матрицы. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы. Использование обратной матрицы для решения систем.

Тема 4. Определители

Определитель n -ого порядка. Свойства определителей. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Определители специальных матриц. Определитель Вандермонда. Определитель произведения матриц. Критерий невырожденности матрицы. Применение определителей к вычислению обратной матрицы. Формулы Крамера решения систем. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Определитель n -ого порядка. Свойства определителей. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Определители специальных матриц. Определитель Вандермонда. Определитель произведения матриц. Критерий невырожденности матрицы. Применение определителей к вычислению обратной матрицы. Формулы Крамера решения систем. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Тема 5. Алгебраические системы. Группы

Операции. Классы операций. Нейтральные и обратные элементы. Обратимые операции. Алгебраические системы. Гомоморфные и изоморфные отображения систем. Группы. Подгруппы. Циклические группы. Отображения групп. Полугруппы. Конечные группы. Таблицы Кэли. Теорема Кэли. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Фактор-группа по нормальному делителю. Теорема о гомоморфизме групп. Ядро гомоморфизма. Операции. Классы операций. Нейтральные и обратные элементы. Обратимые операции. Алгебраические системы. Гомоморфные и изоморфные отображения систем. Группы. Подгруппы. Циклические группы. Отображения групп. Полугруппы. Конечные группы. Таблицы Кэли. Теорема Кэли. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Фактор-группа по нормальному делителю. Теорема о гомоморфизме групп. Ядро гомоморфизма.

Тема 6. Кольца и поля

Кольца. Простейшие свойства. Подкольца. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Характеристика поля. Изоморфизмы полей. Примеры колец, полей. Поле комплексных чисел. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами. Кольцо классов вычетов.

Кольца. Простейшие свойства. Подкольца. Гомоморфизмы колец. Типы колец. Поле. Характеристика поля. Изоморфизмы полей. Примеры колец, полей. Поле

комплексных чисел. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами. Кольцо классов вычетов.

Тема 7. Кольцо многочленов от одной переменной. Поле отношений

Кольцо многочленов над целостным кольцом от одной переменной

Алгебраическая и функциональная точки зрения на многочлен. Понятие алгебраического и трансцендентного элементов. Деление с остатком в кольце Отношение делимости в кольцах. Неразложимые элементы кольца. Факториальные кольца. Условие однозначности разложения любого элемента кольца на простые множители. НОД и НОК в кольцах. Свойства НОД и НОК. Теорема о НОД и НОК в факториальных кольцах. Евклидово кольцо. НОД и НОК в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида. Теорема о факториальности евклидовых колец. Факториальность кольца многочленов над полем Теорема о бесконечности множества неприводимых многочленов в Примитивные многочлены. Теорема Гаусса о содержании произведения многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна в кольце Поле отношений целостного кольца. Поле рациональных дробей. Простейшие дроби.

Кольцо многочленов над целостным кольцом от одной переменной

Алгебраическая и функциональная точки зрения на многочлен. Понятие алгебраического и трансцендентного элементов. Деление с остатком в кольце Отношение делимости в кольцах. Неразложимые элементы кольца. Факториальные кольца. Условие однозначности разложения любого элемента кольца на простые множители. НОД и НОК в кольцах. Свойства НОД и НОК. Теорема о НОД и НОК в факториальных кольцах. Евклидово кольцо. НОД и НОК в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида. Теорема о факториальности евклидовых колец. Факториальность кольца многочленов над полем Теорема о бесконечности множества неприводимых многочленов в Примитивные многочлены. Теорема Гаусса о содержании произведения многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна в кольце Поле отношений целостного кольца. Поле рациональных дробей. Простейшие дроби.

Тема 8. Корни многочленов

Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни. Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Формулы Виета. Изоморфизм кольца над бесконечным кольцом кольцу полиномиальных функций. Интерполяция многочленов.

Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Кратные корни. Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Формулы Виета. Изоморфизм кольца над бесконечным кольцом кольцу полиномиальных функций. Интерполяция многочленов.

Тема 9. Элементы векторной алгебры в пространстве

Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

Линейная зависимость векторов. Трехмерное векторное пространство. Базис.

Подпространство векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе.

Скалярное произведение векторов.

Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

Линейная зависимость векторов. Трехмерное векторное пространство. Базис.

Подпространство векторного пространства. Координаты вектора в данном базисе.

Скалярное произведение векторов.

Тема 10. Метод координат на плоскости

Аффинная система координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат. Деление отрезка в данном отношении. Ориентация плоскости. Угол между векторами на ориентированной плоскости. Формулы преобразования координат. Полярные координаты. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Аффинная система координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат. Деление отрезка в данном отношении. Ориентация плоскости. Угол между векторами на ориентированной плоскости. Формулы преобразования координат. Полярные координаты. Переход от полярных координат к декартовым и обратно.

Тема 11. Прямая линия на плоскости

Различные способы задания прямой на плоскости: точкой и направляющим вектором; двумя точками; точкой и вектором нормали; параметрические и канонические уравнения прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой «в отрезках»; общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчлена Δ . Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Различные способы задания прямой на плоскости: точкой и направляющим вектором; двумя точками; точкой и вектором нормали; параметрические и канонические уравнения прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой «в отрезках»; общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой. Геометрический смысл знака трехчлена Δ . Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми.

Тема 12. Линии второго порядка

Эллипс. Гипербола. Парабола. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах. Директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Центр линий второго порядка. Касательная к линии второго порядка. Диаметры. Сопряженные направления. Главные направления. Главные диаметры. Оси. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду. Эллипс. Гипербола. Парабола. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах. Директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Центр линий второго порядка. Касательная к линии второго порядка. Диаметры. Сопряженные направления. Главные направления. Главные диаметры. Оси. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду.

Тема 13. Преобразования плоскости

Преобразования множества. Композиция преобразований. Группа преобразований. Подгруппа. Групповой подход к геометрии. Движения плоскости. Частные виды движений: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, центральная и скользящая симметрии. Свойства движений. Аналитическое задание. Движение I и II рода. Классификация движений. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Преобразование подобия. Гомотетия. Свойства. Аналитическое задание. Группа подобий и ее подгруппы. Аффинные преобразования плоскости. Свойства. Аналитическое задание. Частные случаи аффинного преобразования: родство, подобие, движение. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Преобразования множества. Композиция преобразований. Группа преобразований. Подгруппа. Групповой подход к геометрии. Движения плоскости. Частные виды движений: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, центральная и скользящая симметрии. Свойства движений. Аналитическое задание. Движение I и II рода. Классификация движений. Группа движений плоскости и ее подгруппы. Преобразование подобия. Гомотетия. Свойства. Аналитическое задание. Группа подобий и ее подгруппы. Аффинные преобразования плоскости. Свойства. Аналитическое задание. Частные случаи аффинного преобразования: родство, подобие, движение. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы.

Тема 14. Метод координат в пространстве.

Векторное и смешанное произведения векторов.

Аффинная система координат в пространстве. Прямоугольная декартова система координат. Ориентация пространства. Формулы преобразования координат в пространстве. Векторное произведение векторов. Площадь треугольника. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.

Аффинная система координат в пространстве. Прямоугольная декартова система координат. Ориентация пространства. Формулы преобразования координат в пространстве. Векторное произведение векторов. Площадь треугольника. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра.

Тема 15. Плоскости и прямые в пространстве

Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости.

Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости.

Геометрический смысл знака многочлена $DCzByAx$. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Связка прямых. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Различные способы задания плоскости. Общее уравнение плоскости.

Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости.

Геометрический смысл знака многочлена $DCzByAx$. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Связка прямых. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Тема 16. Преобразования пространства

Аффинные преобразования. Движения. Подобия. Параллельный перенос.

Поворот. Симметрии относительно точки, прямой и плоскости.

Аффинные преобразования. Движения. Подобия. Параллельный перенос.

Поворот. Симметрии относительно точки, прямой и плоскости.

Тема 17. Поверхности второго порядка

Изучение эллипсоидов, гиперболоидов и параболоидов по их каноническим уравнениям. Цилиндры и конусы второго порядка. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Канонические сечения.

Изучение эллипсоидов, гиперболоидов и параболоидов по их каноническим уравнениям. Цилиндры и конусы второго порядка. Прямолинейные образующие

поверхности второго порядка. Канонические сечения.

Тема 18. Введение в анализ. Действительные числа.

Функции действительного переменного

Действительные числа. Изображение действительных чисел на прямой. Расширения множества действительных чисел. Промежутки. Окрестности. Абсолютная величина. Целая и дробная части числа. Некоторые символы математической логики. Ограниченные множества на прямой. Понятие отображения и функции. Функции действительного переменного. График функции действительного переменного. Способы задания функций действительного переменного. Некоторые типы функций. Обратная функция. Суперпозиция функций.

Действительные числа. Изображение действительных чисел на прямой. Расширения множества действительных чисел. Промежутки. Окрестности. Абсолютная величина. Целая и дробная части числа. Некоторые символы математической логики. Ограниченные множества на прямой. Понятие отображения и функции. Функции действительного переменного. График функции действительного переменного. Способы задания функций действительного переменного. Некоторые типы функций. Обратная функция. Суперпозиция функций.

Тема 19. Предел последовательности. Предел функции

Сходящиеся последовательности. Бесконечные пределы. Частичные пределы. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Переход к пределу в неравенствах. Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Неопределенности. Сходимость монотонной последовательности. Число e . Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Сходящиеся последовательности. Бесконечные пределы. Частичные пределы. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Переход к пределу в неравенствах. Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Неопределенности. Сходимость монотонной последовательности. Число e . Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности.

Тема 20. Непрерывность. Элементарные функции

Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Теорема об обращении функции в 0 (I теорема Больцано-Коши). Теорема о промежуточном значении (II теорема Больцано-Коши). Теорема о множестве значений непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Обратные тригонометрические функции. Теорема об ограниченности непрерывной функции (I теорема Вейерштрасса). Теорема о наибольшем значении (II теорема Вейерштрасса). Степень. Степенная функция. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Гиперболические функции. Некоторые замечательные пределы, связанные с элементарными функциями. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Теорема об обращении функции в 0 (I теорема Больцано-Коши). Теорема о промежуточном значении (II теорема Больцано-Коши). Теорема о множестве значений непрерывной функции. Непрерывность обратной функции. Обратные тригонометрические функции. Теорема об ограниченности непрерывной функции (I теорема Вейерштрасса). Теорема о наибольшем значении (II теорема Вейерштрасса). Степень. Степенная функция. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Гиперболические функции. Некоторые замечательные пределы, связанные с элементарными функциями.

Тема 21. Дифференциальное исчисление функций одного переменного.

Производная.

Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Производные некоторых элементарных функций. Теорема о линейном приближении. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила вычисления производной. Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование. Производные высших порядков.

Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Производные некоторых элементарных функций. Теорема о линейном приближении. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила вычисления производной. Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование. Производные высших порядков.

Тема 22. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения к исследованию функций

Условие постоянства функций. Условие монотонности функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость функции. Условие постоянства функций. Условие монотонности функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость функции.

Тема 23. Интегральное исчисление функций одного переменного. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной. Определение неопределенного интеграла и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование простых дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Понятие первообразной. Определение неопределенного интеграла и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование простых дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Тема 24. Определенный интеграл.

Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Линейность определенного интеграла. Аддитивность определенного интеграла (по промежутку). Неравенства для определенного интеграла. Теорема о среднем значении. Интеграл по ориентированному отрезку. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площади в декартовых координатах. Вычисление площади в полярных координатах. Вычисление объемов с помощью определенного интеграла. Спрямолинейные кривые. Длина гладкой кривой. Площадь поверхности вращения. Интегралы по бесконечному промежутку. Интеграл от неограниченной функции.

Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного

интеграла. Линейность определенного интеграла. Аддитивность определенного интеграла (по промежутку). Неравенства для определенного интеграла. Теорема о среднем значении. Интеграл по ориентированному отрезку. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление площади в декартовых координатах. Вычисление площади в полярных координатах. Вычисление объемов с помощью определенного интеграла. Спрямолинейные кривые. Длина гладкой кривой. Площадь поверхности вращения. Интегралы по бесконечному промежутку. Интеграл от неограниченной функции.

Тема 25. Ряды. Числовые ряды

Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости ряда. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток ряда. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения рядов с положительными членами. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Условно сходящиеся ряды. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости ряда. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток ряда. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения рядов с положительными членами. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Условно сходящиеся ряды. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Тема 26. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность предельной функции и суммы степенного ряда. Интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов. Дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность предельной функции и суммы степенного ряда. Интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов. Дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов.

Тема 27. Степенные ряды. Ряды Фурье

Степенные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Задача о разложении функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в степенной ряд. Разложение в степенной ряд показательной функции. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций. Разложение в степенной ряд логарифмической функции. Разложение в степенной ряд Биномиальный ряд. Понятие

тригонометрического ряда Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье. Степенные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Задача о разложении функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в степенной ряд. Разложение в степенной ряд показательной функции. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций. Разложение в степенной ряд логарифмической функции. Разложение в степенной ряд Биномиальный ряд. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье.

Тема 28. Функции нескольких переменных

Сходимость в пространстве Векторные функции действительного переменного. Открытые и замкнутые множества. Области. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Сходимость в пространстве Векторные функции действительного переменного. Открытые и замкнутые множества. Области. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

Тема 29. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Дифференцируемость гладкой функции. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, существованием частных производных и непрерывностью. Дифференцируемость суперпозиции. Дифференциал суперпозиции. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Дифференцируемость гладкой функции. Связь между гладкостью, дифференцируемостью, существованием частных производных и непрерывностью. Дифференцируемость суперпозиции. Дифференциал суперпозиции. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.

Тема 30. Экстремумы функций нескольких переменных

Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Тема 31. Интегральное исчисление функций нескольких переменных.

Двойной интеграл

Определение двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Объем тела. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения двойного интеграла. Определение двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Объем тела. Геометрический смысл двойного интеграла. Приложения двойного интеграла.

4.3 Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета, экзамена

Типовые вопросы зачета (УК-1)

1. Символика математической логики. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение.
2. Отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения.
3. Композиция отображений.
4. Обратное отображение.
5. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
6. Перестановки. Мощность множества перестановок. Произведение перестановок. Степень перестановки.
7. Циклическая структура перестановки. Четность и знак перестановки.
8. Система линейных алгебраических уравнений. Равносильность систем. Элементарные преобразования.
9. Метод Гаусса. Применение метода Гаусса к исследованию и решению систем.
10. Арифметическое векторное пространство. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость.
11. Базис. Размерность. Ранг системы векторов.
12. Строчечный и столбцовый ранги матрицы. Ранг матрицы.
13. Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения.
14. Структура множества решений совместной системы. Общее решение однородной системы.
15. Общее решение неоднородной системы.

Типовые задания для зачета (УК-1)

- 1 Найти , если
- 2 Доказать, что .
- 3 Найти какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов , , , . Выразить через этот базис остальные вектора системы.
- 4 Вычислить .
- 5 Решить матричное уравнение .
- 6 При решении системы с помощью формул Крамера оказалось, что определитель равен 0. Найти .

Типовые вопросы экзамена (УК-1)

1. Символика математической логики. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение.
2. Отображения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения.
3. Композиция отображений.
4. Обратное отображение.
5. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
6. Перестановки. Мощность множества перестановок. Произведение перестановок. Степень перестановки.
7. Циклическая структура перестановки. Четность и знак перестановки.
8. Система линейных алгебраических уравнений. Равносильность систем. Элементарные преобразования.
9. Метод Гаусса. Применение метода Гаусса к исследованию и решению систем.
10. Арифметическое векторное пространство. Линейные комбинации. Линейная оболочка. Линейная зависимость.

11. Базис. Размерность. Ранг системы векторов.
12. Строчечный и столбцевой ранги матрицы. Ранг матрицы.
13. Исследование системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы. Критерий единственности решения.
14. Структура множества решений совместной системы. Общее решение однородной системы.
15. Общее решение неоднородной системы.

Типовые задания для экзамена (УК-1)

1 Найти

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$$

, если

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12 \mid x\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12 \mid x^2\}.$$

2 Доказать, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

.

3 Найти какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов

$$a_1 = (5, 2, -3, 1)$$

,

$$a_2 = (4, 1, -2, 3)$$

,

$$a_3 = (1, 1, -1, -2)$$

,

$$a_4 = (3, 4, -1, 2)$$

,

$$a_5 = (7, -6, -7, 0)$$

. Выразить через этот базис остальные вектора системы.

4 Вычислить

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^2$$

.

5 Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 3 & i \end{pmatrix}$$

.

6 При решении системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \end{cases}$$

с помощью формул Крамера оказалось, что определитель

$$\Delta_2$$

равен 0. Найти

$$x_1, x_2, x_3$$

4.4. Шкала оценивания промежуточной аттестации

Зачет

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«зачтено» (50 - 100 баллов)	УК-1	Отлично оценивает адекватности и достоверности информации о проблемной ситуации Владеет навыками разработки и обоснования плана действий по решению проблемной ситуации. На вопросы отвечает кратко, аргументировано, уверенно, по существу.
«не зачтено» (0 - 49 баллов)	УК-1	Не знает способы и методы сбора и систематизации информации по проблеме Не может выбрать способ обоснования решения (индукция, дедукция, по аналогии) проблемной ситуации Неправильно отвечает на поставленные вопросы или затрудняется с ответом.

Экзамен

Оценка	Компетенции	Дескрипторы (уровни) – основные признаки освоения (показатели достижения результата)
«отлично» (85 - 100 баллов)	УК-1	Отлично оценивает адекватности и достоверности информации о проблемной ситуации Владеет навыками разработки и обоснования плана действий по решению проблемной ситуации. На вопросы отвечает кратко, аргументировано, уверенно, по существу.
«хорошо» (70 - 84 баллов)	УК-1	Достаточно свободно выбирает методы критического анализа, адекватные в критической ситуации Владеет методикой сбора и систематизации информации по проблеме Вопросы, задаваемые преподавателем, не вызывают существенных затруднений.

«удовлетворительно» (50 - 69 баллов)	УК-1	Недостаточно знает методы разработки и обоснования плана действий по решению проблемной ситуации Плохо владеет методы оценки адекватности и достоверности информации о проблемной ситуации Вопросы, задаваемые преподавателем, вызывают затруднения.
«неудовлетворительно» (менее 50 баллов)	УК-1	Не знает способы и методы сбора и систематизации информации по проблеме Не может выбрать способ обоснования решения (индукция, дедукция, по аналогии) проблемной ситуации Неправильно отвечает на поставленные вопросы или затрудняется с ответом.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

5.1 Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся:

Приступая к изучению дисциплины, в первую очередь обучающимся необходимо ознакомиться содержанием рабочей программы дисциплины (РПД), которая определяет содержание, объем, а также порядок изучения и преподавания учебной дисциплины, ее раздела, части.

Для самостоятельной работы важное значение имеют разделы «Объем и содержание дисциплины», «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» и «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы».

В разделе «Объем и содержание дисциплины» указываются все разделы и темы изучаемой дисциплины, а также виды занятий и планируемый объем в академических часах.

В разделе «Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины» указана рекомендуемая основная и дополнительная литература.

В разделе «Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы» содержится перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, необходимых для освоения дисциплины.

5.2 Рекомендации обучающимся по работе с теоретическими материалами по дисциплине

При изучении и проработке теоретического материала необходимо:

- просмотреть еще раз презентацию лекции в системе MOODLe, повторить законспектированный на лекционном занятии материал и дополнить его с учетом рекомендованной дополнительной литературы;
- при самостоятельном изучении теоретической темы сделать конспект, используя рекомендованные в РПД источники, профессиональные базы данных и информационные справочные системы;
- ответить на вопросы для самостоятельной работы, по теме представленные в пункте 3.2 РПД.
- при подготовке к текущему контролю использовать материалы фонда оценочных средств (ФОС).

5.3 Рекомендации по работе с научной и учебной литературой

Работа с основной и дополнительной литературой является главной формой самостоятельной работы и необходима при подготовке к устному опросу на семинарских занятиях, к дебатам, тестированию, экзамену. Она включает проработку лекционного материала и рекомендованных источников и литературы по тематике лекций.

Конспект лекции должен содержать реферативную запись основных вопросов лекции, в том числе с опорой на размещенные в системе MOODLe презентации, основных источников и литературы по темам, выводы по каждому вопросу. Конспект может быть выполнен в рамках распечатки выдачи презентаций лекций или в отдельной тетради по предмету. Он должен быть аккуратным, хорошо читаемым, не содержать не относящуюся к теме информацию или рисунки.

Конспекты научной литературы при самостоятельной подготовке к занятиям должны содержать ответы на каждый поставленный в теме вопрос, иметь ссылку на источник информации с обязательным указанием автора, названия и года издания используемой научной литературы. Конспект может быть опорным (содержать лишь основные ключевые позиции), но при этом позволяющим дать полный ответ по вопросу, может быть подробным. Объем конспекта определяется самим студентом.

В процессе работы с основной и дополнительной литературой студент может:

- делать записи по ходу чтения в виде простого или развернутого плана (создавать перечень основных вопросов, рассмотренных в источнике);
- составлять тезисы (цитирование наиболее важных мест статьи или монографии, короткое изложение основных мыслей автора);
- готовить аннотации (краткое обобщение основных вопросов работы);
- создавать конспекты (развернутые тезисы).

5.4. Рекомендации по подготовке к отдельным заданиям текущего контроля

Собеседование предполагает организацию беседы преподавателя со студентами по вопросам практического занятия с целью более обстоятельного выявления их знаний по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Все члены группы могут участвовать в обсуждении, добавлять информацию, дискутировать, задавать вопросы и т.д.

Устный опрос может применяться в различных формах: фронтальный, индивидуальный, комбинированный. Основные качества устного ответа подлежащего оценке:

- правильность ответа по содержанию;
- полнота и глубина ответа;
- сознательность ответа;
- логика изложения материала;
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи;
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе;
- использование дополнительного материала;
- рациональность использования времени, отведенного на задание.

Устный опрос может сопровождаться презентацией, которая подготавливается по одному из вопросов практического занятия. При выступлении с презентацией необходимо обращать внимание на такие моменты как:

- содержание презентации: актуальность темы, полнота ее раскрытия, смысловое содержание, соответствие заявленной темы содержанию, соответствие методическим требованиям (цели, ссылки на ресурсы, соответствие содержания и литературы), практическая направленность, соответствие содержания заявленной форме, адекватность использования технических средств учебным задачам, последовательность и логичность презентуемого материала;
- оформление презентации: объем (оптимальное количество), дизайн (читаемость, наличие и соответствие графики и анимации, звуковое оформление, структурирование информации, соответствие заявленным требованиям), оригинальность оформления, эстетика, использование возможности программной среды, соответствие стандартам оформления;
- личностные качества: ораторские способности, соблюдение регламента, эмоциональность, умение ответить на вопросы, систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам программы;
- содержание выступления: логичность изложения материала, раскрытие темы, доступность изложения, эффективность применения средств ИКТ, способы и условия достижения результативности и эффективности для выполнения задач своей профессиональной или учебной деятельности, доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои заключения, выводы.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1 Основная литература:

1. Жуковская Т.В., Молоканова Е.А., Плужникова Е.А., Урусов А.И., Филиппова О.В. Высшая математика : учеб. пособие : в 3 ч.. - Тамбов: [Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина], 2014
2. Просветов Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения : учеб.-практ. пособие. - 3-е изд., доп.. - М.: Альфа-Пресс, 2015. - 287 с.

6.2 Дополнительная литература:

1. Виленкин И. В., Гробер В. М. Высшая математика : линейная алгебра : аналитическая геометрия : дифференциальное и интегральное исчисление. - 6-е изд.. - Ростов н/Д.: Феникс, 2011. - 415 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие. - М.: АСТ, Астрель, 2010. - 558 с.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины, программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории и помещения для самостоятельной работы укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы укомплектованы компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Университета.

Для проведения занятий лекционного типа используются наборы демонстрационного оборудования, обеспечивающие тематические иллюстрации (проектор, ноутбук, экран/ интерактивная доска).

Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

Операционная система "Альт Образование"

LibreOffice

Microsoft Windows 10

Microsoft Office Профессиональный плюс 2007

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Электронный каталог Фундаментальной библиотеки ТГУ. – URL: <http://biblio.tsutmb.ru/elektronnyij-katalog>
2. Университетская библиотека онлайн: электронно-библиотечная система. – URL: <https://biblioclub.ru>
3. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru. – URL: <https://elibrary.ru>
4. Российская государственная библиотека. – URL: <https://www.rsl.ru>
5. Российская национальная библиотека. – URL: <http://nlr.ru>
6. Президентская библиотека имени Б.Н. Ельцина. – URL: <https://www.prilib.ru>
7. Научная электронная библиотека Российской академии естествознания. – URL: <https://www.monographies.ru>
8. Электронная библиотека РФФИ. – URL: <https://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>

Электронная информационно-образовательная среда

https://auth.tsutmb.ru/authorize?response_type=code&client_id=moodle&state=xyz

Взаимодействие преподавателя и студента в процессе обучения осуществляется посредством мультимедийных, гипертекстовых, сетевых, телекоммуникационных технологий, используемых в электронной информационно-образовательной среде университета.